UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A CRIATIVIDADE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE UMA COMPETIÇÃO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nuno Alexandre Rodrigues Amaral

Orientadora: Prof.ª Doutora Susana Paula Graça Carreira

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação

(Especialidade em Didática da Matemática)

2016

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A CRIATIVIDADE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE UMA COMPETIÇÃO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nuno Alexandre Rodrigues Amaral

Orientadora: Prof.ª Doutora Susana Paula Graça Carreira

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação *(Especialidade em Didática da Matemática)*

Júri:
Presidente: Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte
Vogais:
- Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina
- Professora Doutora Maria Isabel Piteira do Vale
- Professor Doutor José Luís Menezes Correia
- Professora Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos
- Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira
- Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques
- Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira

2016

Resumo

A investigação continua a desenvolver esforços para descrever, medir e avaliar a criatividade, designadamente a criatividade matemática. Assumindo a criatividade como um potencial que pode ser desenvolvido em todos os indivíduos, este estudo incide sobre a criatividade matemática na resolução de problemas, no contexto de uma competição matemática inclusiva, que decorre através da Internet, dirigida a alunos do 2.º ciclo (10-12 anos). O quadro teórico desenvolve o conceito de criatividade matemática na sua relação com a resolução de problemas e explora a sua estrutura multidimensional constituída por originalidade, fluência de conhecimento matemático e flexibilidade representacional. Ao mesmo tempo, propõe uma abordagem sistémica da criatividade matemática que reconhece a interação entre pessoa, domínio e campo.

São objetivos do estudo descrever, caraterizar e compreender o fenómeno da criatividade matemática manifestado nas produções dos alunos no contexto de uma competição de resolução de problemas e, ainda, conhecer os pontos de vista dos participantes e respetivos professores acerca desse contexto extracurricular e da sua influência na criatividade matemática.

A metodologia assume um caráter interpretativo, na modalidade de estudo de caso, utilizando a análise de conteúdo de um conjunto de 50 resoluções, mediante um instrumento proposto para análise da criatividade matemática, e de entrevistas estruturadas a alunos participantes na competição e respetivos professores.

Os resultados revelam diversas caraterísticas da criatividade matemática na resolução de problemas dos jovens participantes no campeonato, sobressaindo uma primazia da originalidade que é secundada pela capacidade de representação evidenciada e pelo conhecimento matemático mobilizado. Assim, a criatividade traduz-se por relações particulares entre as três dimensões operacionalizadas no referencial de análise proposto. Em muitos aspetos, as perceções das professoras são consonantes com as dos alunos relativamente ao papel da competição matemática como estímulo para o desenvolvimento da criatividade matemática. Diferem, contudo, noutros aspetos, como seja, na relevância que dão ao conhecimento matemático e às formas de representação para a resolução de problemas.

Palavras-chave: Criatividade Matemática, Resolução de Problemas, Conhecimento Matemático, Representações Matemáticas, Competições Matemáticas

Abstract

The current research continues its efforts to describe, measure, and assess creativity, namely mathematical creativity. Assuming creativity as a potential that can be developed in all individuals, this study focuses on mathematical creativity in problem solving against the background of an inclusive mathematical competition, which takes place over the Internet, and addresses students in the 2nd cycle of elementary school (10-12 years). The theoretical framework discusses the concept of mathematical creativity in its relationship with problem solving and explores its multi-dimensional structure composed of originality, fluency of mathematical knowledge and representational flexibility. At the same time, it addresses a systemic approach to mathematical creativity acknowledging the interaction between person, domain, and field.

This study aims to describe, characterize and understand the phenomenon of mathematical creativity revealed in the students' productions within a problem-solving competition, and also to know the views of the participants and their respective teachers concerning this extracurricular context and its influence on mathematical creativity.

The methodology has an interpretative nature with a case study research design, using content analysis of a set of 50 solutions, by means of an instrument developed for the analysis of mathematical creativity, and structured interviews with students who participated in the competition and their teachers.

The results show a number of characteristics of the young participants' mathematical creativity in solving mathematics problems in the competition, in which stands out the primacy of originality that is supported by the ability to use representations and the mathematical knowledge retrieved. Thus, creativity is reflected in particular relations between the three dimensions operationalized in the proposed analytical framework. In many respects, the teachers' perceptions are in line with the students' about the role of the mathematics competition as a stimulus for the development of mathematical creativity. They differ, however, in other aspects, such as, the importance they give to mathematical knowledge and forms of representation for problem solving.

Keywords: Mathematical Creativity, Problem Solving, Mathematical Knowledge, Mathematical Representations, Mathematical Competitions

Agradecimentos

Quero agradecer a todos o que tornaram este trabalho possível, em especial:

- à minha orientadora, Professora Doutora Susana Paula Graça Carreira, pelas suas orientações e disponibilidade, pela atenção e compreensão que me concedeu, pelas suas sugestões e comentários, pelo seu estímulo positivo e por ter acreditado em mim;

- aos meus pais, por todo o seu apoio e amor incondicional;

- à minha namorada, Helena Ribeiro, pelo seu companheirismo, apoio, ajuda e paciência incondicionais;

- à Sofia Lima, pela coragem, discernimento e determinação que me incutiu em momentos cruciais;

- à Maria Helena, à qual ficarei eternamente grato por me ter moldado e ajudado a crescer a todos os níveis, tornando-me numa pessoa mais sensível, compreensiva, segura e madura e por me ter feito acreditar em mim próprio;

- à Maria Irene, pelos seus conselhos, paciência, compreensão e orientação, principalmente, nos meus momentos mais frágeis, que me tornaram mais forte e capaz para ultrapassado determinados “obstáculos”;

- ao Artur Macedo por ter sempre acreditado nas minhas potencialidades;

- à Sandra Nobre, Hélia Jacinto e Júlio Paiva, pela ajuda, compreensão, apoio e tolerância.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I

CONTEXTUALIZAÇÃO E PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

1.1. Introdução

A riqueza de uma sociedade não está apenas nos recursos naturais de que pode dispor, mas também, e em grande medida, na capacidade inovadora e criativa das gerações mais jovens de apresentar soluções interessantes e eficientes para os problemas que surgem em contextos de crescente complexidade, no mundo atual. Na verdade, os constantes problemas emergentes nos mais diversos contextos sociais requerem sujeitos inovadores para os resolverem, com grande capacidade de adaptação às constantes transformações, com versatilidade e disponibilidade para aprenderem novas técnicas que lhes permitam habilmente tratar as questões com que se deparem, isto é, dotados de um pensamento flexível, crítico, eficaz e criativo (Alvarenga & Vale, 2007). Perante tal realidade, tanto a nível local como no âmbito global, é primordial encontrar e desenvolver talentos, nomeadamente no campo do saber matemático pelo papel que tem nas áreas científica e tecnológica, como tem sido amplamente difundido em cimeiras internacionais e projetos transnacionais. Para isso, é preciso reconhecer e assumir que é através da criatividade matemática que se vê a essência do que significa fazer e aprender matemática (Liljedahl, 2009).

Todos os seres humanos têm potencial para alcançar conhecimento matemático e para desenvolver competências matemáticas, sabendo-se que esse processo passa por uma perspetiva de educação capaz de sustentar e estimular as aptidões dos alunos (Simon, 2007). No entanto, cada indivíduo é único, com caraterísticas, interesses, aptidões e necessidades de aprendizagem próprias, ou seja, congregando um leque de especificidades que é preciso ter em conta.

Esta visão implica que a educação assuma a responsabilidade de promover o desenvolvimento da criatividade, tornando-a um dos objetivos da formação dos indivíduos, designadamente na disciplina de Matemática, tendo em conta a pessoa de cada aluno. Neste propósito, é preciso não esquecer que o desenvolvimento do talento criativo depende tanto dos atributos pessoais e psicológicos como do meio ambiente e de vários fatores sociais. Portanto, a escola, em especial, deve assegurar o desenvolvimento da criatividade, na dupla vertente de capacidades e atitudes, integrando-a nos objetivos curriculares principais da educação matemática. É seu dever definir mecanismos para estimular e manter as habilidades criativas dos alunos, desenvolvendo a sua imaginação na produção de novas ideias úteis para si e para a sociedade (Vale, 2012). Para isso, devem ser considerados aspetos importantes inerentes ao processo criativo, tais como, inventividade, originalidade, flexibilidade e fluência, bem como o fortalecimento de traços de personalidade, nomeadamente, sentido estético, sensibilidade, espontaneidade e capacidade questionadora (Gontijo, 2007).

Para Beghetto & Kaufman (2009), a ideia de potencial "multi-criativo" e a forma como este pode ser explorado na escola implicam uma compreensão clara da natureza da própria criatividade. Para estes autores, se a criatividade é inerente ao processo de aprendizagem, então o potencial criativo dos alunos terá de ser trabalhado nas várias disciplinas. Particularmente, a arquitetura do currículo de Matemática deve ter em conta as diferentes formas como os alunos aprendem tal como o direito que todos têm de receber uma educação adaptada às suas necessidades (Freiman, 2009). Seja como for, na disciplina de Matemática há ainda muito que investir na implementação de estratégias e ações que favoreçam e estimulem o potencial criativo dos alunos. Perante esta realidade, cabe ao sistema de ensino promover oportunidades de aprendizagem adequadas, ao currículo prever possibilidades de trabalhar a criatividade matemática, aos professores contribuir para estes objetivos e aos métodos pedagógicos fazerem desabrochar o potencial dos alunos (Leikin, 2009a; Leikin, Berman & Koichu, 2009; Gontijo, 2007).

A resolução de problemas, em particular, para além de ser um objetivo da aprendizagem, é um meio pelo qual os alunos aprendem Matemática, contribuindo para que adquiram "modos de pensar, hábitos de persistência, curiosidade e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão úteis fora da aula de matemática" (NCTM, 2007, p. 57). Resolver problemas é uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático, mas é também essencial para a aprendizagem de conceitos, representações e procedimentos (Ponte *et al*, 2007). Trabalhar em problemas matemáticos fomenta o raciocínio e a procura da justificação, incentiva a comunicação, proporciona o recurso a diferentes representações, permite estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e torna a Matemática uma disciplina útil para a vida quotidiana (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

Desde há décadas, e nas palavras de muitos investigadores e educadores, a resolução de problemas deve ser olhada como um eixo de toda a educação matemática, uma vez que promove o desenvolvimento de funções cognitivas de alto nível e a capacidade de relacionar a matemática com o mundo real (Fernandes, 1994a; NCTM, 2007; Ponte *et al*, 2007). Nesta perspetiva, o NCTM (2007) defende que a resolução de problemas deve ser parte integrante do ensino da Matemática e os programas de ensino devem estar orientados no sentido de permitir ao aluno:

> construir novos conhecimentos matemáticos através de resolução de problemas; resolver problemas que surgem em Matemática e noutros contextos; aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas; analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas (p. 57).

Bons problemas, envolvendo conceitos e capacidades que os alunos devem desenvolver, são um recurso privilegiado para a aprendizagem da Matemática (Carvalho, 2008). Por exemplo, os problemas moderadamente complexos e variados potenciam a autonomia dos alunos, levando-os a pensar por si próprios e estimulam a construção de estratégias personalizadas, a articulação entre diferentes conhecimentos e a perseverança na procura de soluções (Gontijo, 2007). Contribuem para estimular a criatividade e encorajar os alunos a estudarem e apreciarem a Matemática, permitindo-lhes alargar os seus horizontes (Powell *et al*, 2009). Mesmo as situações mais simples de resolução de problemas poderão fomentar o interesse pela aprendizagem e pela atividade matemática desde que criem no aluno o gosto pela descoberta da solução, estimulando, assim, a curiosidade, a criatividade e o aprimoramento do raciocínio, ampliando também o conhecimento (Gontijo, 2007).

Muitos investigadores consideram a resolução de problemas como a mais criativa atividade matemática (Tall, 1991), da qual os alunos beneficiam cognitivamente com ganhos evidentes a curto prazo e intelectualmente importantes ao longo do tempo (Powell *et al*, 2009). No entanto, a criatividade dos alunos nem sempre é evidente em sala de aula; isso não significa que eles não sejam capazes de pensamento criativo e de formas alternativas de pensar e ver as coisas. Em muitos casos, tais potenciais precisam de ser despertados para se revelarem e daí resulta a importância de um clima que suscite desafio, curiosidade e liberdade de expressão perante problemas que ativem o raciocínio e a comunicação matemática. Mas a realidade é que nem sempre surgem oportunidades para estimular o potencial dos alunos durante as aulas de Matemática, quer em virtude do tipo de trabalho efetuado e conduzido nas escolas, focado no cumprimento do currículo, quer porque os professores se centram demasiado nos conteúdos e no manual escolar, impossibilitando condições e momentos dedicados a pensar, imaginar, explorar, descobrir, levantar hipóteses, estimar, experimentar emoções, atribuir significados e desenvolver a criatividade (Gontijo, 2007).

A compensar este hiato, que se encontra na matemática escolar, os campeonatos e outro tipo de competições centradas na resolução de problemas abrem hoje novas possibilidades para a educação matemática dos alunos (Borba, 2009). Entre várias das vantagens que lhes são atribuídas, destaca-se: i) o acesso dos alunos a problemas interessantes e mais estimulantes do que aqueles que resolvem regularmente na aula de Matemática (Jones & Simons, 1999; Jacinto, 2008), ii) o desenvolvimento da autonomia dos alunos, uma vez que é valorizado o recurso a estratégias próprias e originais e a diferentes representações para comunicar as resoluções (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdniakov & Stedoy, 2009). São portanto boas ocasiões para lidar com problemas matemáticos a partir de diferentes pontos de vista, evitando os formatos convencionais (Gontijo, 2007). Aliás, estudos realizados mostram que a participação em competições matemáticas baseadas na resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades matemáticas dos alunos (Freiman & Applebaum, 2009). Em síntese, estas oportunidades de aprendizagem da Matemática, que se estendem para além da sala de aula, são uma realidade à qual deve ser dada atenção, pois podem constituir um complemento poderoso do currículo escolar (Harrison, 2006).

1.2. Problema e questões de investigação

Atualmente, são muitos os estudantes que participam em atividades extracurriculares de aprendizagem da Matemática, como forma de desenvolvimento e aprofundamento do seu conhecimento nesta área do saber (Kenderov *et al*, 2009). Este tipo de atividades tem em mente atrair estudantes para o mundo da Matemática, dando-lhes uma maior liberdade para aprenderem, estimulando a sua curiosidade e propondo-lhes desafios. Representam por isso um terreno que oferece estímulos distintos daqueles que os alunos encontram habitualmente no contexto escolar (Kenderov, 2006). De facto, a resolução de problemas de Matemática aparece tipicamente como uma atividade que pode estender-se para além da aula e dar origem ao envolvimento das crianças e jovens com a Matemática e com o raciocínio matemático.

O conhecimento e a experiência adquiridos para além da sala de aula podem contribuir frutuosamente para ampliar, diversificar e aumentar o conhecimento matemático proveniente da aprendizagem escolar, sendo expectável que cada um destes impulsione o outro. Nesta perspetiva, e dado que a sala de aula não é mais do que um dos possíveis contextos do processo educativo, é importante ter-se em conta e conhecer-se, tão profundamente quanto possível, o impacto e as potencialidades das competições relacionadas com a educação matemática, nomeadamente as que acontecem para além do contexto escolar.

As atividades extracurriculares, em que se incluem diversos campeonatos de resolução de problemas, desde que desafiantes, interessantes e divertidas, podem ser fundamentais para o aprofundamento e a ampliação do conhecimento matemático, constituindo excelentes oportunidades para os estudantes fortalecerem o seu pensamento matemático (Losada, Yeap, Gjone & Pourkazemi, 2009). São ambientes muito próprios que possuem a capacidade de levar os alunos a testar e pôr em ação as suas ideias matemáticas (Moyer, Niezgoda & Stanley, 2005). Estes projetos originam contextos autênticos de aprendizagem, perspetivando o desenvolvimento de conhecimentos e de competências que poderão ser transferidos para novas situações problemáticas (Wells, 2007).

A importância de investigar os processos que os alunos desenvolvem na atividade de resolução de problemas, dentro e fora da sala de aula, particularmente quando os problemas estão relacionados com conceitos matemáticos, é hoje destacada por diversos autores (p. ex. English, Lesh & Fennewald, 2008; Barbeau & Taylor, 2009). Após um período de relativa estagnação, a investigação sobre a resolução de problemas parece agora readquirir uma nova vitalidade e apontar de forma clara para a necessidade de perceber como os alunos resolvem problemas em estreita ligação com a aprendizagem e a construção de conceitos matemáticos fundamentais. Ao mesmo tempo, pretende-se saber mais acerca de questões afetivo-emocionais e do modo como os jovens lidam com problemas de Matemática em contextos que ultrapassam a aula de Matemática.

Em Portugal, o projeto de investigação Problem@Web[1] decorre das preocupações anteriores e propõe-se estudar a resolução de problemas no contexto de competições matemáticas baseadas na Internet (SUB12 e SUB14) segundo diversas linhas de

[1] Projeto Problem@Web (Resolução de Problemas de Matemática: Perspetivas sobre uma competição interativa na web) financiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia, n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008.

investigação: o uso das tecnologias digitais, os aspetos afetivos e emocionais, e a criatividade matemática na resolução de problemas. A minha participação como membro da equipa deste projeto incidiu particularmente na vertente da criatividade matemática na atividade de resolução de problemas.

Como professor de matemática do 2.º ciclo do Ensino Básico, o meu interesse recaiu sobretudo sobre o estudo da criatividade revelada pelos participantes deste nível de escolaridade numa competição que lhes é dirigida: o SUB12. Este estudo é, em grande parte, motivado pela minha participação neste projeto e procura dar um contributo para o corpo de conhecimento dele resultante.

Face ao exposto, o principal objetivo deste trabalho de investigação é: *descrever, caraterizar e compreender o fenómeno da criatividade matemática manifestado nas resoluções construídas por alunos do 2.º ciclo do ensino básico envolvidos no campeonato de resolução de problemas de matemática SUB12.* Descrever e caraterizar o fenómeno da criatividade significa neste estudo procurar e analisar em profundidade – em certo sentido, "radiografar" – manifestações da criatividade dos alunos na resolução de problemas, bem como compreender de que modo a resolução de problemas reflete a criatividade matemática dos jovens. Paralelamente à caraterização da criatividade matemática na resolução de problemas importa igualmente equacionar o papel das competições matemáticas na valorização da criatividade matemática. Deste modo, aliado ao objetivo principal, emergiu um segundo objetivo que consiste em: *conhecer os pontos de vista de alunos participantes e respetivos professores acerca do SUB12, como contexto extracurricular de resolução de problemas, e da sua relação com a criatividade matemática*.

Neste contexto, a criatividade é entendida em termos das habilidades cognitivas envolvidas no pensamento criativo, expressa nas três componentes: originalidade, flexibilidade e fluência (Scott, Leritz & Mumford, 2004; Karkockiene, 2005). Pretende-se nesta investigação propor e aplicar uma metodologia de análise da criatividade matemática das resoluções dos participantes, através de um referencial de análise que, partindo da perspetiva psicométrica centrada nos parâmetros de originalidade, fluência e flexibilidade, procura relacioná-los com a atividade de resolução de problemas por crianças com aptidões matemáticas não necessariamente extraordinárias. Assim, assume-se que a criatividade deve ser considerada em relação ao contexto em que se manifesta e é vista como a criatividade do dia-a-dia, acessível a uma diversidade de pessoas no ambiente em que desenvolvem as suas ações e realizações. Em certo sentido, pretende-se dar atenção à criatividade inclusiva – a criatividade do c-pequeno, em vez do C-grande – que nos deixe ver a diversidade na aparente uniformidade (Beghetto & Kaufman, 2009).

> Tradicionalmente, os estudiosos da criatividade têm-se centrado em resultados criativos classificados como C-Grande (eminente) ou c-pequeno (quotidiano). A criatividade C-Grande centra-se em exemplos de rasgos de grande expressão criativa (por exemplo, o teorema de Pitágoras, a poesia de Dickinson, as composições de Mozart). Em contraste, a criatividade c-pequeno concentra-se mais na criatividade da vida quotidiana, acessível a quase toda a gente (Runco & Richards, 1998). Um exemplo de criatividade do dia a dia poderia ser a forma criativa com que alguém organiza as plantas e flores no seu jardim, um arranjo que recebe elogios de amigos e familiares (Beghetto & Kaufman, 2009, p. 40).

A definição do objeto de investigação – a criatividade matemática numa competição de resolução de problemas – decorre de algumas premissas que lhe dão suporte e que se passam a explicitar. A resolução de problemas assume, no ensino básico, o lugar de uma capacidade transversal a todo o currículo, ganhando inteira legitimidade a ideia de trabalhar o conhecimento matemático a partir da resolução de problemas. A disponibilidade de contextos, de oportunidades, de recursos e meios para desenvolver atividades com Matemática (exposições, programas de televisão, sítios na Internet, competições nacionais e internacionais, escolas de verão, eventos sobre ciência, projetos científicos para jovens, etc.) coloca redobrada ênfase na Matemática para além da escola (internacionalmente cunhada com a designação de *beyond school mathematics*). Neste panorama, o campeonato de Matemática SUB12 constitui um caso interessante enquanto competição inclusiva de resolução de problemas de Matemática, que decorre para além da escola e em que os participantes têm a oportunidade de desenvolver estratégias próprias e originais, bem como de ativar e/ou ganhar conhecimento matemático perante problemas desafiadores mas com um nível de dificuldade moderado para alunos de 5.º e 6.º anos. Com este objetivo, pretendo contribuir para alargar o conhecimento acerca da criatividade matemática e da sua relação com a resolução de problemas, buscando indicadores observáveis de produções matemáticas criativas, como é sugerido por Saundry & Nicol (2006), entre outros.

Face aos objetivos enunciados e aos pressupostos indicados, a focalização do estudo é feita mediante a formulação de duas questões centrais de investigação, desdobradas em algumas subquestões mais finas, com o intuito de tornar explícitas e claras as orientações a dar à investigação:

1. *Criatividade matemática evidenciada nas resoluções enquanto produtos criativos:*

   Como se manifesta a criatividade dos alunos nas resoluções dos problemas do SUB12, em termos dos indicadores estabelecidos para a sua avaliação?

   1.1. Que evidências distinguem as resoluções criativas dos participantes?

   1.2. Que relação pode ser encontrada entre as representações utilizadas (flexibilidade representacional) e os conceitos e procedimentos matemáticos (fluência de conhecimento) mobilizados nas resoluções?

   1.3. Que tipo de criatividade matemática emerge no contexto do SUB12?

2. *O SUB12 e a resolução de problemas como contexto para a criatividade matemática enquanto processo:*

   Do ponto de vista de alunos entusiastas da resolução de problemas e respetivos professores, qual a influência do SUB12 sobre a criatividade matemática?

   2.1. O que pensam os alunos participantes e os respetivos professores acerca da criatividade na resolução de problemas de Matemática?

   2.2. O que pensam os alunos participantes e os respetivos professores acerca da importância de conhecimentos matemáticos e capacidades sobre a criatividade matemática?

   2.3. Que oportunidades surgem com a participação no SUB12 para a manifestação da criatividade matemática, do ponto de vista dos alunos e dos seus professores?

1.3. Estrutura da tese

A presente tese encontra-se estruturada em cinco capítulos e inclui um conjunto de anexos que reúne os documentos de apoio indispensáveis à leitura e verificação dos dados tratados neste estudo.

No primeiro capítulo é feita a introdução do tema da tese, apresentada a problemática do estudo, os respetivos objetivos e as questões de investigação levantadas, culminando com a descrição da estrutura do trabalho.

No segundo capítulo, onde é feito o enquadramento teórico, discute-se a relação do fenómeno da criatividade com a Matemática e mais especificamente com a resolução de problemas, no contexto de competições matemáticas que decorrem para além da sala de aula, de que é exemplo o SUB12. Na primeira secção é discutido o fenómeno da criatividade em termos gerais: contextualiza-se historicamente a evolução do seu estudo e a sua importância no domínio da educação; aborda-se a complexidade do conceito e a dificuldade de o definir de forma universal; vinca-se a relação entre a criatividade e o conhecimento e termina-se, referindo a necessidade de avaliar a criatividade e propondo indicadores para o fazer. Na segunda secção, contextualiza-se a criatividade no domínio da Matemática e são caraterizados os indivíduos matematicamente talentosos. A terceira secção é marcada pelos seguintes tópicos: a necessidade de integrar a criatividade na matemática escolar; o conceito de criatividade matemática escolar subjacente a este estudo; o entendimento da criatividade como capacidade acessível a todos os alunos; a inclusão da criatividade no currículo de matemática; a importância dos professores no desenvolvimento da criatividade; a influência dos ambientes de aprendizagem na promoção da criatividade matemática. A quarta secção destaca: a relação da resolução de problemas com a criatividade matemática; a ligação entre a fluência do conhecimento matemático e a criatividade em contexto de resolução de problemas; os atributos dos alunos criativos na resolução de problemas; a influência do tempo disponível para a produção de produtos criativos; e a importância das atividades extracurriculares de resolução de problemas para o desenvolvimento da criatividade. Na quinta secção é feita referência às competições internacionais de resolução de problemas para além da sala de aula, bem como ao seu papel no desenvolvimento da criatividade, finalizando-se com a descrição dos problemas propostos no campeonato de resolução de problemas SUB12. Na sexta secção, é dada atenção às formas de representação em Matemática, em particular, colocando em evidência a conexão entre flexibilidade representacional e criatividade no campo da resolução de problemas. Ao longo da sétima e última secção deste capítulo, evoca-se o papel dos professores para uma educação matemática criativa, os ambientes a favorecer bem como a natureza das tarefas a privilegiar.

No terceiro capítulo são apresentadas as opções metodológicas adotadas neste estudo, nomeadamente a escolha do paradigma de investigação, assim como a abordagem metodológica seguida. É feita uma descrição pormenorizada do contexto do estudo, dos procedimentos metodológicos de recolha e análise de dados, e do papel do investigador. Por fim, é explicitada a análise a que foram submetidos os dados e o modo como são apresentados no capítulo seguinte.

No quarto capítulo, procede-se à descrição detalhada dos resultados obtidos sobre o fenómeno da criatividade matemática no contexto do SUB12.

No quinto e último capítulo, são registadas as principais conclusões inferidas a partir dos resultados expostos no capítulo anterior, em articulação com os pressupostos teóricos apresentados no capítulo dois e em sintonia com o problema e questões de investigação formulados no capítulo um. E ainda, neste capítulo, são tecidas algumas considerações finais e indicadas questões em aberto relacionadas com alguns aspetos do estudo que poderão servir de impulso e motivação para futuras investigações.

Finalmente, são apresentadas as referências bibliográficas consultadas ao longo do estudo e os anexos que dele fazem parte.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1. O conceito de criatividade

2.1.1. Contextualização histórica do estudo da criatividade

A história da pesquisa sobre a criatividade tem duas fases distintas – antes e depois de 1950. Antes de 1950, havia pouca pesquisa séria realizada sobre criatividade; ainda assim, proeminentes pensadores debruçaram-se sobre este conceito. Freud, por exemplo, escreveu um ensaio sobre "Escritores criativos e devaneio", em 1908, no qual abordou o "ser estranho", o escritor criativo. Em 1908, Henri Poincaré (1854-1912) fez uma apresentação para a Sociedade Francesa de Psicologia em Paris, intitulada "Criação Matemática", que permanece até hoje como um dos tratamentos mais perspicazes e completos do tema da criatividade matemática e da invenção. Vygotsky (1896-1934) escreveu uma obra intitulada "Imaginação e criação", em 1930, mas não estudou especificamente a criatividade. Einstein (1879-1955), por sua vez, discutiu frequentemente sobre imaginação e criatividade, sendo citado como tendo dito que a imaginação é mais importante do que o conhecimento.

Inspirado pela apresentação de Poincaré, Jacques Hadamard (1865-1963) começou a sua própria investigação empírica sobre a criatividade, cujos resultados culminaram numa série de palestras sobre invenção matemática, em 1943, na *École Libre des Hautes Etudes*, em Nova Iorque. Estas palestras foram posteriormente publicadas como "A Psicologia da Invenção Matemática".

Hadamard (1954) recuperou as ideias que Poincaré tinha proposto e criou uma estrutura conceptual para a caraterização do processo criativo, em geral, através de uma teoria faseada que ainda hoje é reconhecida como a descrição mais viável e razoável do processo de invenção matemática. O fenómeno da invenção matemática, embora marcado pela presumida súbita iluminação, é composto por quatro fases distintas que se sucedem ao longo do tempo, das quais a iluminação é apenas uma parte. A primeira dessas fases, a fase de *iniciação*, consiste no trabalho deliberado, consciente e voluntário, na tentativa de resolução de um problema, por exemplo, através do recurso à experiência prévia. Esta é uma parte importante do processo criativo, uma vez que gera tensão no esforço de resolução, em que se criam as condições necessárias para a libertação emocional que acontece no momento de iluminação. Após a primeira fase, se o indivíduo for incapaz de solucionar o problema ao nível consciente (de acordo com a sua experiência e conhecimento prévio), começa a trabalhar na tarefa a um nível inconsciente. É este momento que marca a segunda fase, a *incubação*, o processo inventivo que está indissociavelmente ligado ao esforço consciente e intencional que o precede. Após o período de incubação pode ocorrer a *iluminação*, que marca a terceira fase, na qual se faz a transição entre o inconsciente e o consciente, resultando numa ideia ou solução que emerge na mente do solucionador, sendo esta experiência por vezes descrita como *AHA!*. Independentemente do impulso, a exatidão da ideia ou da solução emergente é avaliada durante a quarta e última fase, a *verificação*.

No essencial, até à década de 50, o estudo da criatividade focou-se nos indivíduos superdotados ou talentosos e, portanto, esta foi interpretada como um processo excecional. Consequentemente, a avaliação da criatividade não constitui, nessa fase, uma preocupação primordial porque o ato criativo era reconhecível pelos resultados extraordinários de alguns indivíduos. Após 1950, no congresso da Associação Americana de Psicologia, através do seu discurso presidencial, Guilford incentivou os psicólogos a debruçarem-se mais intensamente sobre o estudo da criatividade em crianças na idade escolar, argumentando tratar-se de um tema importante que não estava a ser estudado ou pesquisado ao nível que o justificava (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013; Kaufman & Beghetto, 2009; Beghetto & Kaufman, 2007). O foco de Guilford sobre a criatividade das crianças nas escolas resultou do seu reconhecimento da relação entre a criatividade e a aprendizagem, perspetiva esta compartilhada por muitos teóricos clássicos, inclusive Piaget e Vygotsky (Beghetto & Kaufman, 2007). Guilford considerava o processo criativo como baseado na combinação do pensamento convergente, que aponta para uma única solução correta para um problema, e do pensamento divergente, que envolve a geração de múltiplas respostas para um problema ou explicação de um fenómeno (Leikin, 2013). Nesta perspetiva, durante o seu discurso presidencial, Guilford propôs que se aplicassem ferramentas psicométricas para avaliar a criatividade em todos os indivíduos e introduziu instrumentos de estudo do pensamento divergente para alcançar esse objetivo (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). De repente, o conceito atraente, mas nebuloso, de criatividade ganhava objetividade, profundidade e amplitude para poder ser medido e explorado. Neste percurso histórico, o verdadeiro génio da contribuição de Guilford foi a capacidade de especificar a noção vaga e intrigante de criatividade, de acordo com constructos que definem o pensamento criativo individual (Kurtzberg & Amabile, 2001).

Muito do trabalho de Guilford pode ser resumido a quatro constructos-chave que constituem a criatividade: a *fluência*, caraterizada pela capacidade de produzir um grande número de ideias; a *flexibilidade*, identificada pela capacidade de produzir muitos tipos diferentes de ideias; a *originalidade*, marcada pela capacidade de produzir ideias inusitadas; e a *elaboração*, definida pela capacidade de desenvolver essas ideias (Kaufman, 2009). Enquanto investigador, Guilford colocou a criatividade num quadro mais amplo da inteligência, tentando organizar toda a cognição humana em três dimensões. A primeira dimensão foi chamada de *operações* ou *processos* de pensamento e significava simplesmente a ginástica mental necessária para realizar qualquer tipo de tarefa. A segunda dimensão, denominada de *conteúdo*, referia-se aos assuntos, em geral. E a terceira dimensão, a do *produto*, representava os resultados reais que poderiam ser originados por meio de diferentes tipos de pensamento sobre diferentes tipos de assuntos (Kaufman, 2009). O foco de Guilford nas caraterísticas, motivações e comportamentos dos indivíduos criativos foi continuado nas décadas seguintes. Muitas das ideias e estudos que foram publicados na década subsequente ao seu discurso ainda são amplamente citados e respeitados (Kaufman, 2009). Portanto, um bom ponto de partida para falar sobre a ciência da criatividade pode ser encontrado na própria obra de Guilford. Este investigador estimulou e inspirou o estudo da criatividade (Kurtzberg & Amabile, 2001), tornando-o num campo de estudo próspero e atrativo, já que antes do seu discurso apenas 0,2% de toda a pesquisa em Psicologia era dedicada ao assunto.

Embora a relação entre a aprendizagem e a criatividade fosse um ponto fundamental do discurso presidencial de Guilford, nos anos que se seguiram, as energias concentraram-se ainda noutras facetas da criatividade. Apesar dos esforços para a compreensão da natureza do pensamento criativo do dia-a-dia, estes foram insuficientes no que diz respeito ao papel que a criatividade desempenha no desenvolvimento de conhecimento novo e pessoalmente significativo (Beghetto & Kaufman, 2007). De facto, grande parte da pesquisa realizada na segunda metade do século passado debruçou-se sobre a criatividade eminente, a dos grandes criadores talentosos, à qual vários autores chamaram criatividade do Grande-C. Por exemplo, os quatro constructos definidos por Guilford para caraterizar o pensamento divergente representaram a base para a medida mais popular da criatividade, o Teste Torrance de Pensamento Criativo

(TTCT, abreviatura em inglês), destinado a selecionar indivíduos sobredotados, que foi projetado por Paul Torrance em 1966 (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013; Kaufman, 2009).

Enquanto pioneiro na pesquisa de criatividade em educação, há mais de 50 anos, Torrance olhou para este conceito como um processo e desenvolveu uma bateria de testes de habilidades de pensamento criativo, da qual resultou o TTCT. O teste pressupunha o desempenho em tarefas verbais e figurativas que podiam ser avaliadas em função da *fluência* (número total de respostas adequadas), da *flexibilidade* (o número de diferentes categorias de respostas), da *originalidade* (raridade das respostas) e da *elaboração* (quantidade de detalhes usados nas respostas) (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). O objetivo de Torrance foi desenvolver um teste válido e confiável de habilidades de pensamento criativo que poderia ser administrado a indivíduos, desde o jardim-de-infância até à idade adulta.

O investigador considerava a criatividade em estado de contínuo desenvolvimento, em oposição àqueles que acreditavam que esta capacidade era estabelecida numa idade precoce. Apesar de a sua investigação revelar que a criatividade não se desenvolvia de forma linear, ele defendia que era possível a utilização de atividades, métodos de ensino, elementos de motivação e procedimentos para a potenciar ao longo da vida e não apenas na infância. Para ele, a criatividade era um fenómeno ilimitado, assumindo que um indivíduo podia ser criativo de forma crescente, processo no qual a prática seria central para o seu desenvolvimento. Neste sentido, as escalas do TTCT foram definidas como indicadores do potencial criativo, significando portanto a maior ou menor probabilidade de um comportamento criativo. Por outro lado, Torrance reconheceu que a ocorrência de elevados resultados no TTCT não garantia a realização criativa real, admitindo que a motivação e outros fatores poderiam fazer a diferença (Runco, Millar, Acar & Cramond, 2010).

Em resumo, tomar o TTCT como critério exclusivo para avaliar a criatividade pode ser problemático porque o pensamento divergente não é simplesmente a mesma coisa que a criatividade. O pensamento divergente é um aspeto da criatividade, mas não um substituto exato da realização criativa (Beghetto, 2013b). A criatividade não se resume apenas ao pensamento divergente. Embora a capacidade de pensamento divergente seja uma pedra angular da criatividade, não basta que os produtos realizados sejam diferentes dos demais para serem considerados criativos; pelo contrário, é importante que sejam também adequados, úteis e relevantes para as tarefas em mão (Kaufman, 2009). Ainda assim, para além de ser uma das ferramentas mais populares e mais utilizadas em pesquisas sobre a criatividade, o TTCT é também um dos instrumentos de avaliação da criatividade mais frequentemente usados por educadores em ambientes escolares.

Portanto, a primeira onda de investigação sobre a criatividade, desenvolvida entre os anos 50 e 70 do século passado, foi fortemente influenciada pela psicologia da personalidade e focada no desenvolvimento de instrumentos psicométricos para identificar os componentes caraterísticos de criatividade em diferentes domínios. Uma das principais motivações deste trabalho foi a construção de ferramentas métricas capazes de identificar o talento excecional numa idade precoce, com o intuito de selecionar os indivíduos mais propensos a ter sucesso em ocupações que exigiam criatividade. Mas os resultados desta fase inicial de investigação foram dececionantes, dado que os estudos longitudinais desenvolvidos revelaram uma relação pouco consistente entre os traços de personalidade das crianças e o seu sucesso criativo na vida adulta. Face a esta realidade e ao facto da abordagem da personalidade ter atingido o seu limite de investigação, o campo da criatividade foi amplamente repensado durante as décadas de 70 e 80, tendo surgido uma segunda onda de pesquisadores que defenderam a mudança de foco do campo da personalidade para o campo dos processos. Esta transição foi inspirada pela ascensão da psicologia cognitiva que na década de 70, distanciando-se da personalidade e das diferenças individuais, projetou a criatividade para os processos mentais que estão na base não só da capacidade excecional como também das capacidades do dia-a-dia (Sawyer, 2003). Contudo, na segunda metade da década de 80, mais propriamente em 1987, Haylock, após revisão da literatura educacional entre 1966 e 1985, demonstrou que o tema da criatividade era ainda negligenciado na investigação em educação matemática, assumindo ser necessário dar mais atenção ao assunto em sala de aula.

Na década seguinte, durante os anos 90, a literatura científica sobre criatividade aumentou exponencialmente com o aparecimento de novas revistas de investigação, conferências internacionais e livros consagrados ao tema, coincidindo, por outro lado, com progressos significativos na ciência psicométrica (Barbot, Besançon & Lubart, 2011). Durante este período intenso de investigação no âmbito da criatividade educacional, mais especificamente em 1997, Silver sugeriu a ligação da resolução de problemas às categorias da criatividade criadas por Torrance em 1966. No entanto, duas décadas após a contribuição de Haylock, Roza Leikin analisou os estudos publicados em educação matemática entre 1999 e 2009 e verificou, também, que muito poucos foram dedicados a questões relacionadas com a criatividade (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Felizmente, nos últimos anos, a comunidade de educação matemática tem vindo a prestar mais atenção à questão da criatividade, designadamente através de movimentos de educadores matemáticos que criaram o Grupo Internacional de Criatividade Matemática e Sobredotação (http://igmcg.org) e da inclusão de grupos de discussão nas conferências ICME[2]-11, ICME-12 e CERME[3]. O objetivo é animar a comunidade de investigação em educação matemática para o estudo da criatividade matemática, do potencial matemático e do talento matemático. Entretanto, continua a ser reduzido o número de estudos empíricos sobre a criatividade associada à educação matemática (Leikin, 2013; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013).

Em jeito de síntese, foi com Guilford e outros investigadores da altura, na década de 50 do século passado, que a criatividade começou a ser vista como uma dimensão psicológica amplamente distribuída na população em geral, que podia ser desenvolvida e medida. Esta nova abordagem ao conceito marca o ponto de partida para o interesse moderno na criatividade e corresponde a um foco mais incisivo sobre a criatividade de todos os dias, a criatividade do “mini-c”, em oposição à criatividade histórica, a criatividade eminente do “Grande-C” atribuída aos génios. Desde esse momento e mais claramente a partir da década de 60, o campo da criatividade avançou progressiva e consideravelmente na descrição e definição do conceito, bem como no desenvolvimento de medidas e técnicas para o avaliar (Barbot, Besançon & Lubart, 2011). Mas devido à multiplicidade das abordagens conceituais à criatividade usadas naquele tempo, o domínio da criatividade proliferou de forma problemática através de técnicas de avaliação com falta de definições consensuais e de aplicação limitada à educação. A imprecisão em torno da definição do conceito de criatividade foi a fonte principal da dificuldade encontrada para a validação de ferramentas de avaliação que proliferaram (Barbot, Besançon & Lubart, 2011). Na verdade, a definição de criatividade é um tema de pesquisa em si mesmo. Há mais de 100 definições diferentes de criatividade na literatura e existem muitas técnicas para avaliá-la, provavelmente porque muitos cientistas, ao lidarem com a questão conceitual propõem tanto uma definição de criatividade, como um método para a sua avaliação (Barbot, Besançon & Lubart, 2011).

---

[2] International Congress on Mathematical Education

[3]Congress of European Research in Mathematics Education

Desde a época de Guilford, a pesquisa sobre a criatividade abordou três áreas gerais: os processos cognitivos do pensador criativo; a personalidade criativa e elementos comportamentais do pensador criativo; e, mais recentemente, o amplo contexto ambiental que interage com o trabalho criativo. Em todas estas áreas, o foco foi colocado diretamente sobre o indivíduo, destacando-se o processamento cognitivo individual, as diferenças individuais e os efeitos do ambiente (Kurtzberg & Amabile, 2001).

2.1.2. À procura de um conceito de criatividade

Num mundo acelerado, complexo, incerto, instável e em constantes mutações, a capacidade de inovação e de resolução de novos problemas é de extrema importância para se obter sucesso. As tecnologias, os costumes sociais e as ferramentas disponíveis são substituídos quase tão rapidamente como são apresentados, obrigando os indivíduos, no presente, a recorrerem ao pensamento criativo para prosperar e, às vezes, até mesmo para sobreviver (Sternberg, 2008). Em particular, a criatividade dos matemáticos e dos cientistas é responsável pelos avanços tecnológicos, bem como pelas suas repercussões na qualidade de vida das pessoas (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Portanto, a criatividade tem um papel cada vez mais relevante tanto na realidade mundial como na vida de cada pessoa, ora na melhoria do contexto social ora no progresso da humanidade (Oliveira, 2010). Desta forma, ser criativo é uma caraterística fundamental, uma vez que aumenta e favorece a capacidade de adaptação e a obtenção de sucesso do sujeito no mundo atual, face aos novos problemas e desafios com que se defronta (Chávez-Eakle, Eakle & Cruz-Fuentes, 2012).

O mundo precisa de indivíduos que o imaginem e que proponham formas de o mudar a cada passo (Robinson, 2005). Indivíduos criativos e hábeis, capazes de compor sinfonias, escrever romances, produzir obras de arte, curar doenças, eliminar a fome... (Treffinger, 2008). Mas a criatividade não é um poder em si mesmo; é uma potencialidade humana demonstrada e manifestada através da forma de pensar, agir e fazer, traduzida, muitas vezes, em ideias e produtos inovadores (Urban, 2007). Consiste, portanto, numa faculdade básica que pode ser usada para a construção de ideias e produtos originais (Runco, 2003), possibilitando ao ser humano estabelecer novas relações para mudar a realidade de forma útil e com significado (Mina, 2008). Está associada à resolução de problemas, à forma de comunicação, ao tipo de pensamento, ao uso de habilidades, à cooperação e ao conhecimento, ou seja, a competências de que os indivíduos precisam para serem bem-sucedidos no trabalho e na vida no século XXI (Sheffield, 2008). A mobilização de sujeitos criativos, capazes de resolverem problemas de forma inovadora, é também um imperativo da cada vez maior transdisciplinaridade dos problemas emergentes (Vale, 2012; Leikin, 2009; Silver, 1997). Por isso, a nível mundial, o desenvolvimento da criatividade é uma prioridade de governos e organizações que se mostram, mais do que nunca, preocupados e empenhados com a adaptação dos indivíduos à incerteza e à complexidade (Grainger & Barnes, 2006).

A par das entidades governamentais, líderes de negócios e personalidades associadas aos meios de comunicação defendem a integração da criatividade nos currículos dos alunos (Beghetto & Kaufman, 2013). Desta forma, a criatividade tornou-se um tema "efervescente" na educação, porque se entende como fundamental capitalizar as habilidades do maior número possível de indivíduos, com o intuito de as nutrir, afinar e enriquecer ao longo das suas carreiras académicas e profissionais (Bulgar, 2008). Neste processo, o papel dos cientistas, inventores, professores, investidores, artistas e líderes é vital, não apenas na transmissão do conhecimento mas também na promoção e no desenvolvimento da criatividade (Sriraman, 2008).

Traços de personalidade que favorecem a expressão criativa, como autoconfiança, independência de pensamento, iniciativa e coragem para assumir riscos, são hoje encarados como exigências dos profissionais de sucesso nos diferentes tipos de organizações (Alenear, 2003; Guerra, 2007). O desenvolvimento dessas caraterísticas permite, em grande medida, a entrada dos indivíduos no mundo da investigação e da ciência (Velikova, 2008). Reunir condições para a realização do potencial e talento dos indivíduos criativos permitirá o desenvolvimento de novas gerações de cientistas e artistas, que poderão contribuir para o desenvolvimento da sociedade, das ciências e da tecnologia na era moderna (Aizikovitsh-Udi, 2013). Assim, entender o fenómeno da criatividade e os processos envolvidos no pensamento criativo é um desafio que pode transformar a compreensão humana das problemáticas mundiais, especialmente no presente que exige soluções criativas para problemas globais (Chávez-Eakle, Eakle & Cruz-Fuentes, 2012). Portanto, cabe aos sistemas de ensino, nomeadamente à escola, proporcionar e estimular o desenvolvimento da criatividade, perspetivando-a como um dos objetivos de cada área curricular no contexto escolar (Gontijo, 2011). Face a esta realidade e dada a sua complexidade, é de extrema importância dar sentido ao conceito de criatividade, no sentido de o enquadrar e operacionalizar de forma tão objetiva quanto possível.

A origem etimológica da palavra criatividade está no latim e no grego: o termo latino *creare* significa “fazer” e o termo grego *krainen* significa “realizar”. Não obstante a aparência simples, a noção de criatividade possui uma complexidade que dá origem a uma variedade de pontos de vista, uma vez que varia de domínio para domínio, de uma sociedade para outra, além de que não é consensual, entre os especialistas, o que constituem produtos criativos.

A literatura é rica em definições de criatividade, tendo em conta o produto, as pessoas, a personalidade, a habilidade intelectual, os estilos de pensamento, o domínio do conhecimento, a motivação e os contextos onde o fenómeno ocorre (Karkockiene, 2005; Sternberg, 2006; Aldous, 2007; Starko, 2010; Barbot, Besançon & Lubart, 2011; Zhang & Sternberg, 2011; Sternberg, 2012). Na maioria das definições é reconhecida a complexidade da criatividade e a necessidade de ser vista como um fenómeno multifacetado e não como uma caraterística excecional capaz de uma definição precisa e única (Sharma & Teper, 2008). Portanto, não há um conceito preciso de criatividade, unânime ou mesmo geralmente aceite em trabalhos de investigação; ao invés, são várias as definições encontradas na literatura que apresentam vários pontos comuns e que, ao mesmo tempo, enfatizam diferentes aspetos relacionados com o fenómeno. Por exemplo, é globalmente aceite a relação da criatividade com a capacidade de inovação (Karkockiene, 2005). Com efeito, a criatividade aparece geralmente associada à capacidade de pensar fora do expectável, de ter ideias originais, à arte de inventar e inovar (Beghetto & Kaufman, 2013; Beghetto & Kaufman, 2007; Selter, 2009). No entanto, apesar da sua clara importância, a novidade não é suficiente por si só; se assim fosse, todas as ideias ou sugestões absurdas e loucas, desde que novas, seriam criativas. Então, se algo não é apropriado, apesar de ser original, não pode ser considerado criativo (Beghetto e Kaufman, 2014). Embora a novidade seja um dos traços caraterísticos do ato de criar, o facto de uma ideia se mostrar inesperada não significa que seja criativa, para tal é preciso que detenha significado, relevância, utilidade, adequação e eficácia (Beghetto, 2013a; Cropley & Cropley, 2007).

O conceito de criar é usado normalmente para indicar a capacidade de produzir novas ideias, abordagens e ações, vistas como apropriadas e úteis ao contexto em que surgem (Leikin, 2009b; Silver, 1997; Vale, 2012; Amabile, 2012; Beghetto, 2013a; Samaniego, 2008; Sriraman, 2008; Starko, 2010; Teo & Waugh, 2010). O ato criativo ode ser considerado um processo mental, envolvendo a geração de ideias ou conceitos novos ou o estabelecimento de novas associações entre ideias ou conceitos existentes, manifestando-se por meio de resultados criativos, originais e úteis (Leikin, Subotnik, Pitta-Pantazi, Singer, & Pelczer, 2013). Neste seguimento, Oliveira (2010) enfatiza aspetos comuns das diferentes definições de criatividade abordadas na literatura, destacando o que é novo, original, útil e com valor social, num determinado momento. Tal como o autor anterior, após examinar várias definições de criatividade apresentadas por diferentes autores, Aralas (2008) associa o conceito a determinadas caraterísticas como novidade, originalidade e surpresa, e defende que as mesmas devem ser um ponto de partida importante para a pesquisa que visa formular uma noção de criatividade. Ainda assim, a novidade parece insuficiente, pelo que também se consideram o conhecimento, as habilidades intelectuais, a motivação, o ambiente e o domínio de ideias específicas como necessários para obter resultados criativos (Sriraman, 2008; Ward, 2007).

Apesar da variedade de propostas existentes, qualquer definição de criatividade que admita uma dimensão intersubjetiva terá de reconhecer que, para além da novidade e da adequação dos resultados criativos, o público-alvo e o contexto são importantes para a sua constituição (Csikszentmihalyi, 1999). A força do ato criativo depende muito da comunicação e modo de apresentação do produto criado, bem como do teor de inovação que este encerra e das potencialidades que lhe são reconhecidas (Urban, 2007). No entanto, a variabilidade do conceito não pode tornar-se num rápido motivo para descartar a relevância pedagógica da criatividade e, pelo contrário, o seu desenvolvimento em todos os indivíduos deve ser um objetivo da educação, independentemente da definição de criatividade adotada (Leikin, Berman & Koichu, 2009). Com efeito, encontrar e incentivar indivíduos com talento criativo é um desafio tanto para a escola como para toda a sociedade.

2.1.3. Relação entre indivíduos criativos e conhecimento

Desde o início da investigação sobre criatividade que o conceito de independência intelectual tem sido utilizado para descrever indivíduos favoráveis à insubmissão e autodisciplina, tolerantes à ambiguidade, com capacidade de gerar ideias e com vontade de superar obstáculos (Amabile, 2012; Sternberg, 2007). São os indivíduos normalmente céticos perante ideias convencionais e dispostos a assumir riscos intelectuais na descoberta de coisas novas (Gomez, 2007), tendencialmente concisos, curiosos, intuitivos, perseverantes, de mente aberta e recetivos à experiência (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013), cuja capacidade criativa é influenciada pela profundidade do seu conhecimento geral e específico, bem como pela capacidade de o dominar, relacionar e aplicar (Sharma & Teper, 2008). A propensão para conceberem produtos criativos não só está relacionada com a sua experiência, habilidades, motivação e autoconfiança (Beswick, 2008) mas também com trabalho árduo, conhecimento organizado, persistência face ao fracasso e apresentação coerente dos resultados da sua criação (Rostan, 2010).

A definição de criatividade como construção de significado pessoal é consistente com a noção de que esta capacidade resulta da autoexpressão e autorrealização de cada indivíduo (Runco, 2003). Então, é significativa a premissa de que a criatividade pode manifestar-se em qualquer indivíduo, uma vez que cada um tem a capacidade mental de construir interpretações pessoais (Runco, 2003). Neste processo, o conhecimento e a motivação são componentes decisivas (Rostan, 2010)

A criatividade pode ser entendida em termos da prontidão de qualquer indivíduo para criar algo de novo num determinado domínio (Gusev & Safuanov, 2012), em função das suas capacidades pessoais ou da experiência que possui no domínio em causa (Csikszentmihalyi, 1999), tendo por base ideias inteligentes, elegantes e surpreendentes que ultrapassam o pensamento analítico (Milgram & Hong, 2009; Steinberg, 2013). Portanto, a atitude perante a vida e o domínio do conhecimento são caraterísticas que diferenciam os indivíduos criativos, os quais respondem habitualmente aos problemas de uma maneira nova e, ao mesmo tempo, inovadora (Sternberg, 2008; Sternberg, 2007). O conhecimento que possuem permite-lhes perceber e definir problemas de forma distinta, armazenar e recuperar informação de variadas formas, de notar coisas que os outros ignoram e de produzir soluções únicas e inimagináveis. O conhecimento é o alicerce que sustenta a conceção das suas ideias, muitas vezes, baseadas na intuição, visualização, antevisão e imaginação, associadas à capacidade de combinar elementos disponíveis para formar conhecimento novo, usando analogias, resumindo ideias, levantando hipóteses e planeando processos (Sophocleous & Pitta-Pantazi, 2011). Tais ideias são, em muitos casos, traduzidas em produtos criativos que, para além de revelarem novidade, relevância e eficácia, podem ainda exibir elegância (Cropley & Cropley, 2011). Quando tal acontece, o fenómeno criativo é entendido como a capacidade de expressão própria de indivíduos que conseguem usar o conhecimento de forma original e imaginativa para transformar a realidade (Irish National Teachers' Organisation, 2009).

Sem um certo nível de conhecimento, a manifestação da criatividade seria difícil ou mesmo impossível (Sriramam, 2008). Jamais alguém fez um avanço criativo e significativo num dado domínio sem conhecimento prévio do mesmo. As ideias novas e úteis emergem de operações mentais realizadas com base no conhecimento existente que constitui o alicerce fundamental para a realização criativa e, ao mesmo tempo, a matéria-prima necessária ao pensamento criativo. Logo, o conhecimento é determinante para selecionar e usar as melhores operações mentais, possibilitando a sua aplicação da forma mais fácil e criativa (Ward, 2007). No entanto, as pessoas criativas não o são a todo o momento, os seus produtos emergem a longo prazo e dependem do domínio de conhecimento, grau de especialização numa determinada área e capacidade para comunicar o valor dos resultados alcançados (Robinson, 2005; Runco, 2006). Logo, as pessoas criativas não o são por mero acaso; por detrás das suas manifestações criativas está um intenso trabalho de aquisição, construção, consolidação e aplicação de conhecimento. É importante notar que os processos envolvidos na produção das ditas ideias brilhantes são processos cognitivos comuns que estão ao alcance da maioria das pessoas se não mesmo de todas as pessoas comuns. Portanto, o potencial criativo pode ser considerado como normal e não como algo raro nos indivíduos (Ward, 2007).

Em jeito de síntese, sendo o conhecimento uma condição necessária, este não é de forma alguma suficiente para o emergir da criatividade (Sternberg, 2007). Embora o domínio de conteúdos específicos seja importante, por exemplo, para recuperar, processar e integrar informação, bem como para estabelecer conexões entre diferentes conceitos e tipos de informação (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013), também a capacidade de guardar, gerir e tratar a informação disponível é indissociável da busca do novo, diferente, inédito e não rotineiro. Enfim, numa primeira análise da relação entre pessoas criativas e conhecimento, deparamo-nos com um conjunto de traços dominantes, caraterísticos da forma como as pessoas lidam com a informação e com as ideias. Assim, as ideias podem ser vistas como a verdadeira moeda de troca no reino da criatividade (Plucker & Zabelina, 2009).

2.1.4. Avaliação da criatividade

A criatividade é essencial para o desenvolvimento de talentos mas é muito difícil de identificar e avaliar (Mann, 2006; Runco, 2006). Isto decorre, provavelmente, do facto de ser um conceito complexo, que assume várias formas de expressão e diferentes influências (Runco, 2004). Mas, independentemente da sua variabilidade e complexidade, o reconhecimento de um comportamento criativo pressupõe discernir um resultado criativo. Por exemplo, os estudos que se focam no produto criativo concentram-se em ideias traduzidas de formas palpáveis, que são apresentadas, muitas vezes, nas respostas dos sujeitos (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013).

As perspetivas que dão destaque ao desenvolvimento da criatividade enfatizam a importância da construção de ferramentas que permitam a sua avaliação e desenvolvimento (Leikin, 2009b). Tais ferramentas, especialmente sob a forma de testes de criatividade, são hoje abundantes e bastante disseminadas. A importância destes instrumentos decorre do argumento de que a criatividade poderá ser menosprezada se não for formalmente avaliada em testes padronizados que se propõem medi-la cuidadosamente, como se pretende fazer, por exemplo, com a avaliação das aprendizagens (Leikin, 2013). A este propósito, Silver (1997) menciona o TTCT, validado por um extenso programa de pesquisa, que assenta nos três elementos chave: inovação/originalidade, fluência e flexibilidade. Entre outros, estes conceitos têm sido usados para construir ferramentas com potencialidades para identificar evidências de criatividade dos alunos (Mann, 2006, Mann, 2005; Silver, 1997). Das três dimensões referidas, a inovação ou originalidade é a mais amplamente reconhecida no fenómeno da criatividade, uma vez que se relaciona com a geração de ideias, abordagens e ações únicas (Leikin, 2009b). As pessoas que têm propensão para inovar tendem a quebrar as regras e experiências iniciais de forma consciente (Csikszentmihalyi, 1999). Por isso, dos indivíduos criativos espera-se a capacidade para pensarem com base em várias categorias diferentes e para desenvolverem ideias originais, adotando diferentes pontos de vista. A flexibilidade, a fluência e a originalidade têm sido os principais indicadores e os mais usados para definir a maneira segundo a qual as pessoas criativas pensam (Karakelle, 2009).

Originalidade

Uma vez que a criatividade é geralmente associada a um processo que leva à geração de ideias únicas, a originalidade é comummente reconhecida como a sua principal componente (Leikin, 2013; Runco, 2004b), traduzindo-se por conceber ideias incomuns e, consequentemente, produtos invulgares. Se algo não é novo nem incomum, então não é original e consequentemente não é criativo (Runco & Jaeger, 2012). Sendo assim, a originalidade é um critério usado como um forte indicador de pessoas criativas e refere-se à capacidade de gerar ideias novas, valiosas e únicas, em resposta a uma questão, caraterizando-se por uma forma singular de pensar, que se manifesta através de produtos revolucionários (Guerra, 2007).

Os produtos criativos são sempre originais, o que significa que um indivíduo pensou em ou produziu algo que outros não foram capazes. Tal não significa o acesso privilegiado de um indivíduo a certo tipo de informação diferente e sofisticada; ao invés, as suas manifestações criativas resultam da interpretação pessoal que faz da informação disponibilizada. Logo, o mecanismo fundamental da criatividade da pessoa é a capacidade de produzir uma interpretação pessoal e original de uma experiência ou acontecimento (Runco, 2006). No entanto, embora os produtos criativos sejam sempre originais, nem sempre o que é original é criativo, ou seja, a unicidade não é suficiente para que um produto seja considerado criativo (Runco & Jaeger, 2012), implicando também flexibilidade e fluência (Leikin, 2009b). Sem utilidade, ajuste ou adequação as ideias e produtos meramente originais podem muito bem ser improfícuos (Runco & Jaeger, 2012). Desta forma, a originalidade, embora condição vital para que uma ideia ou produto seja considerado criativo, pressupõe, ainda, que o mesmo seja eficaz (Beghetto, 2007a; Runco, 2003; Runco, 2006; Runco, 2004; Runco & Jaeger, 2012).

No campo da criatividade, a componente da originalidade é suscetível de uma definição operacional, passível de se materializar em termos de raridade estatística ou novidade objetiva. Por exemplo, se apenas um indivíduo em cem produz uma solução específica para um problema particular, então essa solução pode ser objetivamente definida como única e, portanto, original (Runco, 2004). A originalidade é, sem dúvida, uma das componentes que integram a criatividade, mas a sua definição e validação depende da comparação de produtos ou ideias que ocorrem dentro de um determinado público e dentro do contexto em que este está inserido (Runco, 2003).

Fluência

A fluência não é uma operação em si; trata-se da facilidade cognitiva que pode ser desenvolvida e treinada em quase toda a forma de pensar (Oppenheimer, 2008). Consiste na espontaneidade de execução de procedimentos, habilidades e processos essenciais para realizar facilmente uma determinada tarefa mental (Diezmann & Lowrie, 2009; Oppenheimer, 2008), combinando precisão com velocidade na procura de uma resposta (Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008). Refere-se às ideias geradas para responder a uma questão, à continuidade que estas mantêm e ao fluxo de associações entre elas, cuja rapidez e precisão facilitam a mobilização de recursos necessários para atingir a compreensão (Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008). Por outras palavras, a fluência é potenciadora do uso de capacidades de ordem superior em vez de desempenhos mecânicos (Blinder, Haughton & Bateman, 2002). Portanto, a fluência é fundamental para pôr em ação capacidades de ordem mais elevada (Benjamin, Foy, Konowitch& Mauprivez, 2013).

Os indivíduos fluentes numa área ou conhecimento específico revelam naturalmente a capacidade de o lembrar e aplicar posteriormente, sem que seja necessário reaprendê-lo quando este é preciso; demonstram capacidade de manterem os níveis de desempenho e atenção/concentração na realização das tarefas por longos períodos de tempo, resistindo a distrações; e manifestam a capacidade para combinar e aplicar o que aprenderam em tarefas mais complexas, de forma criativa e em novas situações (Blinder, 2002). Sendo a fluência menos proeminente na criatividade do que a originalidade e a flexibilidade, é importante que seja conjugada com essas duas componentes, uma vez que gerar uma grande quantidade de ideias (fluência ideacional) não significa que estas sejam necessariamente interessantes (Guerra, 2007).

Flexibilidade

O pensamento criativo está intimamente relacionado com a flexibilidade de pensamento (Haylock, 1997). A capacidade de quebrar conjuntos mentais estabelecidos e de ultrapassar a rigidez de pensamento é um aspeto importante do processo criativo que se prende com a flexibilidade. Portanto, a criatividade implica originalidade e também flexibilidade (Pizarro, Detweiler-Bedell & Bloom, 2006), pois ambas são responsáveis por estimularem o pensamento divergente, indispensável aos processos mentais de ordem superior (Vale, 2011). Tal como a originalidade, a flexibilidade é uma caraterística do ato criativo e está em sintonia com as mudanças aparentes nas abordagens adotadas para gerar respostas (Silver, 1997), nomeadamente em momentos que visam superar a fixação ou romper com estereótipos. É decisiva para encontrar uma variedade de opções e perspetivas disponíveis perante situações novas e para escolher a mais adequada, pressupondo o pensamento cuidadoso sobre cada alternativa (Starko, 2009).

Uma elevada flexibilidade cognitiva pode facilitar categorias mais elevadas de originalidade e de comportamento criativo (Zabelina & Robinson, 2010). Os indivíduos criativos tendem a ser abertos a novas experiências e demonstrar mais flexibilidade cognitiva do que as pessoas menos criativas (Pizarro, Detweiler-Bedell & Bloom, 2006). Optam por diferentes alternativas, variam métodos empreendidos e modificam comportamentos, atitudes e pontos de vista (Guerra, 2007). O pensamento flexível permite-lhes estabelecer associações entre diferentes áreas do conhecimento em resposta a um estímulo (Karakelle, 2009), nomeadamente fazendo um uso seletivo de conhecimentos face às situações particulares (Spiro, Coulson, Feltovich, & Anderson, 1988). Por exemplo, a flexibilidade cognitiva destaca-se pela capacidade de associação de ideias para resolver problemas (Vale, 2012). Portanto, a flexibilidade é uma aptidão que capacita os indivíduos criativos para lidarem com mudanças constantes (Runco, 2004b).

Do que foi exposto, importa destacar que a noção de criatividade não permite uma definição única nem unânime; muito pelo contrário, são várias as perspetivas em que esta pode ser discutida e conceptualizada. Em todo o caso, há uma certa tradição que parece ter-se mantido até ao presente, sustentada pelas perspetivas psicométricas e, muito em especial, pelos trabalhos incontornáveis de Torrance. Esses estudos, baseados em baterias de testes de criatividade, acabaram por dar consistência à teoria dos elementos constituintes da criatividade, como atrás descritos, com o propósito de avaliar a presença da criatividade nos indivíduos.

2.2. Criatividade matemática

2.2.1. Criatividade no domínio intelectual da Matemática

É mais fácil encontrar obras, livros, artigos e estudos sobre Criatividade e Arte, Criatividade e Música do que sobre o binómio Criatividade e Matemática (Guerra, 2007). Encontrar uma definição precisa e amplamente aceite de criatividade matemática é uma tarefa extremamente difícil e, provavelmente, inatingível, o que dificulta a investigação neste domínio (Mann, 2006). Com efeito, a variedade de definições de criatividade, encontradas na literatura, cria desafios na identificação, construção e desenvolvimento do conceito de criatividade matemática (Mann, 2005; Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Ainda assim, a criatividade é uma das caraterísticas que assegura o crescimento da Matemática como um todo (Sriraman, 2009; Sriraman, 2008). Contudo, não deve ser vista como um atributo exclusivo dos cientistas, sendo, também, essencialmente uma parte da existência quotidiana de todos os seres humanos, pois, representa uma propriedade dinâmica da mente humana, que pode ser reforçada e deve ser valorizada (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012).

O progresso de qualquer sociedade depende, em grande medida, da inteligência matemática criativa (Bonka & Andzans, 2008). Por exemplo, os desenvolvimentos no campo da Matemática impulsionam o progresso tecnológico, da mesma forma que a evolução da tecnologia exige o desenvolvimento da Matemática. Neste contexto, a criatividade matemática é um tipo específico de habilidade ou capacidade, cuja importância é óbvia. Por um lado, reflete os avanços em diferentes ramos da Matemática e consequentemente a evolução da inteligência humana. Por outro lado, projeta a Matemática como uma das áreas científicas centrais que permite a sustentabilidade do progresso tecnológico e científico numa variedade de domínios, através da criação, por cientistas e especialistas em diferentes ramos do conhecimento, de engenhos poderosos, modelos de análise de situações, prognósticos e processos de resolução de problemas.

A Matemática está perto do topo numa lista hierárquica de domínios intelectuais, ordenada de acordo com a evidência da criatividade na atividade de produção científica (Silver, 1997). Este relevo deve-se à capacidade que a Matemática tem para "convocar recursos e capacidades cognitivas diversas tal como o raciocínio plausível, a imaginação e a intuição necessários à produção de conhecimento" (Ponte *et al*, 2007, p. 2). Portanto, é relevante considerar a criatividade como o principal mecanismo de crescimento da Matemática como ciência (Sriraman, 2009). Esta relação íntima que a Matemática estabelece com a criatividade, torna-a, de entre as diferentes disciplinas escolares e científicas, uma das que tem maior potencialidade para incentivar abordagens criativas, capazes de promover e desenvolver um pensamento inovador e útil para a vida real (Gusev & Safuanov, 2012).

Em geral, a criatividade matemática evidencia-se pela quantidade de ideias diferentes produzidas sobre um mesmo ou vários assuntos, pela apresentação de detalhes nas ideias desenvolvidas, pela capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas a uma mesma questão e pela apresentação de respostas incomuns (Gontijo, 2006). Logo, falar de criatividade matemática é também falar de uma das caraterísticas do pensamento avançado, que se reflete na capacidade de formular objetivos, problemas e questões interessantes, bem como de gerar produtos que revelam a compreensão de relações matemáticas e permitem a descoberta de novas relações anteriormente ocultas (Leikin, 2013). Neste sentido, a formação indivíduos criativos, com uma forte base de conhecimento matemático, capazes de reconhecer e definir problemas, gerar múltiplas soluções ou caminhos para uma solução, justificar conclusões e comunicar resultados, é hoje primordial e crucial (Sheffield, 2008; Cerqueira & Vale, 2013).

Compreender a Matemática e saber lidar com conceitos e procedimentos matemáticos representa uma necessidade básica para os indivíduos na sociedade moderna, permitindo-lhes enfrentar problemas, bem como responder a desafios pessoais, profissionais e sociais. Uma proporção crescente de problemas e situações encontradas na vida quotidiana e em contextos profissionais requerem algum nível de compreensão da Matemática, de raciocínio matemático e domínio de ferramentas matemáticas. Estas exigências do século XXI requerem indivíduos capazes de usar os seus atributos e recursos matemáticos em ambientes novos e inconstantes, de forma flexível e criativa (Steinberg, 2013). Neste processo, o raciocínio matemático é entendido como a habilidade fundamental que os jovens necessitam de desenvolver na sua formação, no sentido de entenderem questões importantes e estarem aptos a resolver problemas significativos (OCDE, 2013). Aliás, como Runco (2006) defende, as performances criativas dependem, em grande medida, de raciocínio.

Atualmente, reconhece-se que a génese do pensamento criativo acontece em idades precoces e durante os anos escolares, razão pela qual o papel dos fatores sociais e culturais é inestimável para o desenvolvimento do talento criativo (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Logo, a educação de cidadãos com pensamento criativo, reflexivo e crítico, fundamental para a tomada de decisões e resolução de problemas, deveria ser um dos principais objetivos pedagógicos da educação matemática (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012; Leikin, 2009a; Samaniego, 2008). Para tal, é central que o sistema educacional facilite a cada sujeito, independentemente do seu nível social e económico, situações de aprendizagem matemática que correspondam ao seu potencial criativo e possam promovê-lo ao máximo (Leikin, 2011). Isto implica propiciar a cada indivíduo oportunidades para manifestarem a sua criatividade e revelarem o seu potencial (Leikin, 2013). Neste enquadramento, é pertinente questionar os objetivos da educação, considerando o desenvolvimento da criatividade como uma prioridade (Chávez-Eakle, Eakle & Cruz-Fuentes, 2012). Não se podem esquecer aqui aspetos que contribuem para a emergência do processo criativo, tais como curiosidade, imaginação, originalidade, flexibilidade, fluência, inventividade, elaboração, espontaneidade, sensibilidade e sentido estético (Gontijo, 2011). Mas estas habilidades não nascem prontas e completas em cada indivíduo e nem se desenvolvem por conta própria, é importante criarem-se as condições ideais para que sejam exploradas, cultivadas e nutridas, visando cultivar o potencial criativo matemático de cada aluno (Sheffield, 2008). Porém, é preciso ter em conta que a criatividade matemática de qualquer indivíduo, para além de estar dependente das suas habilidades, também requer o domínio de conhecimentos, atitudes e hábitos associados à imaginação e ao pensamento flexível para resolver problemas novos e variados (Starko, 2009). Em síntese, trabalhar a imaginação, habilidades e conhecimentos específicos é essencial para a promoção da criatividade (Kaufman & Baer, 2006).

2.2.2. Indivíduos matematicamente talentosos

A criatividade é uma capacidade natural do ser humano que se destaca quando este se mostra curioso, se embrenha totalmente no desconhecido, com interesse por explorar e por descobrir e com uma constante necessidade de questionar (Hansen-Smith, 2008). A curiosidade é uma condição importante na resolução de problemas, principalmente dos mais difíceis (Starko, 2009), porque tem a ver com o desejo de desvendar o porquê das coisas, levando ao mesmo tempo a construir novos conhecimentos e a dar-lhes significado pessoal (Shriki, 2009). Para Csikszentmihalyi (1999), a curiosidade é talvez a caraterística mais relevante dos indivíduos criativos, manifestando-se pelo seu constante interesse por tudo o que acontece ao seu redor. Segundo o autor, é uma caraterística das pessoas intrinsecamente motivadas, capazes de se sentirem recompensadas pela atividade em si, sem esperarem qualquer compensação ou reconhecimento extrínsecos.

Uma das complexidades da relação entre o talento e a criatividade matemática está enraizada na oposição entre ser uma faceta própria dos matemáticos profissionais (Sriraman, 2005) e a conceção de que pode e deve ser desenvolvida em todos os alunos (Sheffield, 2009). Desde os primeiros anos de escolaridade, os indivíduos matematicamente talentosos revelam traços intelectuais que a sociedade não deve negligenciar, entre os quais dinamismo, curiosidade, motivação, persistência, inovação, flexibilidade e rapidez na apreensão de conceitos matemáticos abstratos (Freiman, 2006; Budak, 2012). Limitar a criatividade não só nega a todos os indivíduos a oportunidade de desenvolverem plenamente a sua compreensão matemática, como também a realização do seu potencial talento (Mann, 2006). Todos os indivíduos, especialmente os mais talentosos, podem ser desafiados de acordo com o seu conhecimento, contexto e interesses, independentemente da sua formação matemática ser mais ou menos avançada (Sheffield, 2009).

Os indivíduos matematicamente talentosos são diferentes dos seus pares, ao nível das capacidades de abstração e generalização, processamento de informação, flexibilidade, execução de operações, capacidade de decisão em situações de resolução de problemas e tenacidade; aprendem de forma mais rápida e são curiosos, buscando o entendimento das ideias e de modelos conceptuais (Sriraman, 2008). Destacam-se também por uma intuição muito desenvolvida (Sharma & Teper, 2008). São interessados e capazes de revelar as suas capacidades por via de interpretações incomuns de experiências ou de situações (Runco, 2004a). Apresentam um bom nível de comunicação e compreensão verbal, dominam uma quantidade significativa de conhecimento e evidenciam capacidade para gerar soluções originais (Budak, 2012). Aprendem melhor os conteúdos quando os abordam de forma criativa, isto é, preferem aprender criando, fazendo-o de uma maneira mais rápida e melhor do que através de informações fornecidas pelos professores (Starko, 2009; Irish National Teachers' Organisation, 2009).

Esses indivíduos revelam criatividade matemática desde uma idade relativamente precoce; são dotados de flexibilidade (por exemplo, rápida capacidade de mudar de uma operação para outra, bem como de uma linha de pensamento para outro), esforçam-se para encontrar a via mais fácil, mais clara e mais rápida de resolver problemas; exibem capacidade de ver padrões e relações matemáticas e são capazes de transferir aprendizagens efetuadas para novas situações matemáticas (Freiman, 2006, 2009). São quantitativamente alfabetizados, pois conseguem interpretar grandes quantidades de dados e fazer julgamentos equilibrados com base nessas interpretações (Schoenfeld, 1992). Manifestam disposição para superar obstáculos, são tolerantes à ambiguidade, estão abertos a novas experiências e acreditam no que estão a fazer (Zhang & Sternberg, 2011). Assumir riscos intelectuais é uma das suas caraterísticas, o que lhes possibilita expressarem com consistência e de forma válida, opiniões, ideias e produtos diferentes das dos seus pares e mesmo das dos seus professores (Starko, 2009). Sendo assim, a criatividade pode ser um meio para fornecer informações úteis relativas ao perfil matemático dos indivíduos, nomeadamente, sobre o seu talento matemático (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013).

2.2.3. Conhecimento, motivação e tempo na criatividade matemática

O conhecimento é uma condição necessária para que uma pessoa seja criativa, incluindo-se aí a própria construção do conhecimento (Leikin, 2011; Leikin & Lev, 2013). Ao contrário de informação estagnada e inerte, o conhecimento é dinâmico e requer a consciência de ligações potencialmente produtivas entre o que se pretende saber e o que se sabe (Feldhusen, 2006). Permite descobrir resultados novos ao mesmo tempo que garante confiança e meios para abordar tarefas e desafios com sucesso (Treffinger, 2008). A imaginação é uma condição indispensável para a construção e aprofundamento do conhecimento, dado que é ativada pelos indivíduos quando ligam conceitos já conhecidos a conceitos novos (Leikin & Lev, 2013).

A criatividade matemática está intimamente relacionada com a profundidade do conhecimento em domínios de conteúdo, além de ser frequentemente associada a longos períodos de trabalho e a uma visão considerada fora do comum (Zazkis & Holton, 2009; Silver, 1997). Esta ideia de visão fora do comum pode estar relacionada com a motivação para conjeturar e explorar em Matemática, bem como para imaginar questões e trabalhar sobre elas, numa perspetiva de ver a Matemática e o trabalho nesta área de uma forma especial. Isso significa vontade de investir tempo, pressupondo motivação e disposição para explorar e adiar o encerramento de qualquer atividade enquanto não for encontrada a solução, dado que as ideias produtivas não são, muitas vezes, as primeiras que emergem na mente (Runco, 2004a). A motivação, aliada ao conhecimento, é, portanto, um elemento que potencia a expressão criativa, uma vez que coloca em ação recursos de personalidade e cognitivos que contribuem para o desenvolvimento de habilidades criativas relevantes e suportam o desempenho criativo ao longo da vida (Stoycheva, 2002). Quanto maior a motivação intrínseca, maior a probabilidade de descobertas e aplicações criativas (Mann, 2005). Os produtos criativos surgem de forma mais expressiva quando os indivíduos estão intrinsecamente motivados (Amabile, 2012).

As pessoas são criativas quando se sentem motivadas pelo interesse, prazer, satisfação e desafio do trabalho em si mesmo (Amabile, 2012). Raramente produzem trabalho verdadeiramente criativo numa determinada área, a menos que estejam motivadas e concentradas a fazer o que gostam, sem pensarem nas potenciais recompensas. Quando criam, fazem-no por prazer (Sternberg, 2007) e, por isso, a essência da criatividade matemática pode estar na motivação em ir para além do conhecido, no desejo de criar uma visão pessoal, na vontade de explorar, questionar, discutir, explicar e refutar (Yerushalmy, 2009).

No processo criativo o tempo é um fator crucial, dado que a produção de soluções eficazes para problemas de grande complexidade não é habitualmente rápida e o tempo investido traduz-se, normalmente, em intenso prazer pessoal e envolvimento significativo. Mas os benefícios têm um custo, a criatividade exige trabalho, esforço e risco, tal como são necessários muitos anos de trabalho árduo para desenvolver os conhecimentos essenciais que permitirão as contribuições criativas que vão além do comum.

As ideias matemáticas criativas não surgem subitamente, no entanto, no exato momento em que emergem, de forma perspicaz, parecem espontâneas. Na verdade, acontece que a ideia brilhante, que chega de repente, é o resultado de um trabalho e de um longo período de pensamento e de maturação das ideias no domínio do conhecimento selecionado (Beghetto & Kaufman, 2013). Embora a criatividade implique conhecimento, ambos prosperam com o tempo, sendo que nenhum deles é adquirido instantaneamente. Na verdade, a criatividade e o emergir de ideias perspicazes é quase impossível sem um considerável tempo de aquisição de conhecimento teórico-prático e sem uma experiência de trabalho continuado. Portanto, em qualquer que seja o nível de criatividade, a base de conhecimento a partir da qual se trabalha é um elemento crítico do processo criativo (Feldhusen, 2006). Mesmo a criatividade quotidiana exige tempo, esforço, compreensão e domínio do assunto, além da vontade de compartilhar a construção criativa com os outros, mesmo sabendo que a sua rejeição pode ter lugar (Beghetto & Kaufman, 2013). Por exemplo, quando um estudante compartilha uma perspetiva nova e pessoalmente significativa sobre como resolver um problema de matemática, corre o risco de que a sua ideia não seja compreendida e consequentemente não seja aceite. Um aluno que se oferece para apresentar a sua resolução à turma corre riscos. E não são precisos muitos incidentes para que alguém se convença que não vale a pena o esforço e o risco de compartilhar ideias pessoais, passando a achar mais fácil fornecer as respostas esperadas pelo professor e colegas. Incentivar a criatividade inclui, portanto, ajudar os estudantes a tomar consciência dos potenciais custos e benefícios associados à expressão criativa, pois só assim estarão em posição de determinar se o risco vale a pena (Beghetto & Kaufman, 2013).

2.3. Criatividade na matemática escolar

2.3.1. Criatividade absoluta *versus* criatividade relativa

A aprendizagem da Matemática enfrenta diariamente problemas relacionados com motivação, compreensão e ligação do que se aprende às necessidades dos alunos. Muitos alunos não gostam das aulas de Matemática por variadas razões: acham-nas difíceis, aborrecidas e entediantes. É preciso contrariar esta tendência e convencer os alunos de que a Matemática, para além de ser fundamental na sociedade atual e no futuro de cada um, também é divertida em todas as suas formas e que vale a pena aprofundá-la. Por isso, o processo de ensino e aprendizagem não se pode restringir apenas à transmissão de conteúdos, técnicas e métodos.

Embora a Matemática seja baseada em normas que devem ser aprendidas, é importante que os alunos se movam para além delas e que sejam capazes de se expressarem em linguagem matemática. Neste sentido, é preciso valorizar o pensamento criativo e inovador, a flexibilidade para lidar com desafios, a abertura à novidade, a coragem para enfrentar o inesperado e a habilidade para propor soluções inovadoras (Alencar, 2008). Para tal, são necessárias mudanças, tanto nos conteúdos curriculares, como no estilo de ensino, de modo a incentivar: a busca de soluções e não apenas a memorização de procedimentos; a exploração de padrões e não apenas a memorização de fórmulas; e a formulação de conjeturas e não apenas a resolução de exercícios (Schoenfeld, 1992). Isto pressupõe oportunidades para os alunos estudarem Matemática, explorando-a de forma dinâmica e não como um corpo rígido, absoluto e fechado, de leis a serem memorizadas. Os alunos devem ser encorajados a olharem para a Matemática como uma ciência e não como um cânone, reconhecendo-a, também, como um conhecimento sobre padrões e não apenas sobre números (Schoenfeld, 1992). Sendo assim, um dos objetivos educacionais deve consistir na formação de indivíduos com pensamento independente e crítico, capazes de abordagens criativas para resolver problemas científicos ou práticos e de adquirir conhecimento de forma autónoma para ser usado criativamente no mundo real (Gusev & Safuanov, 2012). Desta forma, a criatividade deve ser um aspeto nuclear do processo de ensino e aprendizagem, do currículo e, globalmente, do ambiente escolar (Lassig, 2012).

Face a uma sociedade em permanente mudança, onde os cidadãos são constantemente confrontados com novos desafios, é primordial o papel da escola para o desenvolvimento das capacidades criativas dos alunos (Pinheiro & Vale, 2013). Esta preocupação tem sido assinalada em diversos países, nas diversas áreas curriculares, inclusive em Matemática, orientando as políticas educacionais para a elaboração de um currículo escolar focado nas capacidades individuais dos alunos, onde a criatividade é considerada fundamental e se valoriza a apresentação de soluções inovadoras para os problemas (Gontijo, 2010).

O desenvolvimento da criatividade na educação matemática não é um problema que se restrinja à aprendizagem da Matemática, é, também, um problema de desenvolvimento humano individual. Como seres sociais, tememos a diferença, mas o seu reconhecimento a nível individual é essencial (Hansen-Smith, 2008). Para que os alunos se sintam realizados e sejam bem-sucedidos é basilar que a aprendizagem contemple o desenvolvimento livre das ideias, respeitando as caraterísticas intelectuais de cada um e estimulando o desejo de aprender, criando condições que promovam a motivação e a criatividade matemática.

A motivação, preferencialmente intrínseca, é determinante para o ato criativo, portanto, aprender Matemática deve inspirar e incentivar o pensamento independente, a capacidade de tomada de decisões, a comunicação e a empatia entre as pessoas (Lénárt, 2008). O bom ensino da Matemática promove uma aprendizagem autorregulada, a metacognição e disposições cognitivas que sustentem a resolução de problemas (em particular, o conhecimento sobre quando e como usar estratégias de resolução). Uma boa educação matemática prepara os alunos para raciocinarem de forma eficaz em situações desconhecidas, bem como para preencherem as suas lacunas de conhecimento por meio da observação, exploração e interação com situações desconhecidas (OEDC, 2014).

Há um crescente interesse da comunidade científica de educação matemática no campo do talento e da criatividade, suportado pela obra intensiva de grupos de estudos sobre atividades e programas para alunos com talento matemático, tanto em congressos como em várias publicações recentes (p. ex. Leikin, Berman, & Koichu, 2009; Sriraman, 2008; Sriraman, Freiman, & LirettePitre, 2009; Sriraman & Lee, 2010, citados em Freiman & Rejali, 2011). No entanto, a relação entre criatividade matemática e talento matemático não é clara para muitos investigadores (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013). Este binómio é um ponto intrigante na pesquisa educacional, dado que uns afirmam que a criatividade é um tipo específico de talento, outros acham que a criatividade é a componente essencial do talento e ainda outros sugerem que são duas caraterísticas independentes nos seres humanos (Leikin &

Lev, 2013). Além disso, outra dificuldade que limita a clarificação desta relação prende-se com a distinção entre criatividade matemática como um apanágio do matemático profissional e a ideia de que a criatividade pode ser desenvolvida em todos os alunos (Leikin & Lev, 2013). Outro ponto crítico, que também conturba esta relação e acentua a sua ambiguidade, é a existência de múltiplas visões, perspetivas culturais e abordagens pedagógicas da questão (Freiman & Rejali, 2011). Mas, independentemente de algumas disparidades, é ponto assente, para muitos autores, que a criatividade é essencial para o desenvolvimento do talento e da competência em Matemática (Mann 2005; Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2012). É uma caraterística inerente ao próprio saber matemático e embora esteja, muitas vezes, associada à genialidade ou a habilidades excecionais, ela pode ser amplamente estimulada na população escolar de uma forma geral (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013; Mann, 2005; Pelczer & Rodríguez, 2011; Runco, 2003; Steinberg, 2013; Silver, 1997).

Este ponto de vista sobre a criatividade está em concordância com a conceção Vygotskiana de desenvolvimento cognitivo e criativo, que postula que todos os indivíduos têm potencial criativo. Todos são capazes de transformar e reorganizar informação disponível e estruturas mentais com base no conhecimento existente (Kaufman & Beghetto, 2009). Defende-se que as escolas podem influenciar positivamente o desenvolvimento criativo quando a aprendizagem é mais autêntica, indo além da reprodução do conhecimento, levando os alunos a desenvolverem os seus próprios conhecimentos e estratégias através de desafios (Lassig, 2012).

Neste sentido, a criatividade matemática escolar é diferente da dos matemáticos profissionais (Leikin & Lev, 2013; Srirman, 2005). A distinção entre criatividade absoluta e criatividade relativa está enraizada no modo como se estabelece o que é novo (Orey, 2010). Considerar a criatividade como uma caraterística que pode ser desenvolvida em idades escolares, exige essa distinção entre criatividade relativa e absoluta (Leikin, 2009b). Ao nível da criatividade absoluta, o novo significará, por exemplo, um resultado matemático até então desconhecido e que pode ser essencial para a comunidade matemática em geral (Orey, 2010). Assim, a criatividade absoluta está associada a descobertas que promovem a Matemática como uma ciência, a nível global, de que são exemplo as obras de Fermat, de Hilbert, de Riemann e de tantos outros matemáticos proeminentes (Sriraman, 2005). Já no que diz respeito à criatividade relativa, um produto matemático é novo, acima de tudo, para a pessoa que o produziu ou para um determinado grupo de referência, como seria o caso de uma sala de aula (Orey, 2010). Portanto, a criatividade relativa é avaliada tendo como suporte as experiências anteriores dos indivíduos e o seu desempenho em comparação com outros que têm uma história educacional similar, ou seja, refere-se a uma descoberta de um aluno específico num determinado grupo de referência (Sriraman, 2005; Orey, 2010). Logicamente, os alunos podem oferecer ideias novas em relação à Matemática que já aprenderam e aos problemas que já foram por eles resolvidos (Leikin, 2013).

Este tipo de criatividade, dita relativa, começa a ganhar força como um dos objetivos importantes da educação matemática escolar, pois é um tipo de criatividade que pode manifestar-se, por exemplo, na procura de resposta a desafios que não têm uma resolução imediata. Quando confrontados com esses desafios, se um método apropriado não ficar diretamente disponível através da memória, os alunos poderão tentar inferir a solução através de alguns exemplos conhecidos e análogos à situação dada. Se desta atividade cognitiva não surgir um método adequado para a resolver a situação em causa, o aluno poderá inventar um novo método de resolução ou criar um novo modelo conceptual, aumentando o número de ideias disponíveis acerca do assunto. Este processo constitui a essência do pensamento criativo ou inventivo (Orey, 2010).

2.3.2. Aprofundando o conceito de criatividade matemática escolar

A diferença entre o trabalho de um matemático e o de um estudante está no nível em que cada um opera (Liljedahl, 2004; Shriki, 2009; Sriraman, 2008). Por outras palavras, assumindo que cada um opera no seu nível respetivo devemos reconhecer que os alunos também são capazes de gerar produtos criativos (Shriki, 2009). Num nível profissional, a criatividade matemática, denominada por vários autores de Grande-C, pode ser definida como a capacidade de produzir trabalho original que estende, significativamente, o conhecimento e que, ao mesmo tempo, abre caminhos ou novas questões para outros matemáticos (Beghetto & Kaufman, 2009). Já a criatividade escolar, inclusiva e acessível a todos os alunos, referenciada por diferentes autores como mini-c, é considerada como um processo a partir do qual resultam soluções perspicazes e incomuns, bem como a formulação de novas questões que permitem que um novo ou velho problema sejam considerados a partir de novos ângulos (Beghetto & Kaufman, 2009). Note-se que a segunda parte desta definição é muito semelhante à da criatividade do Grande-C, reservada ao grupo dos matemáticos profissionais (Sriraman, 2008).

Felizmente, a maioria dos investigadores reconhecem que a criatividade não se limita apenas a quem alcança a eminência como resultado de suas contribuições criativas. O resultado desse reconhecimento repercutiu-se no esforço de postular e fundamentar a afirmação de que o potencial criativo é amplamente distribuído. O argumento a favor da criatividade amplamente distribuída baseia-se na distinção conceitual e empírica entre as contribuições criativas eminentes (Grande-C) e a criatividade de todos os dias (Pequeno-c) (Beghetto & Kaufman, 2007).

A distinção entre criatividade Grande-C e Pequeno-c serviu para ampliar o alcance da pesquisa sobre o conceito. Áreas de investigação que se concentram na criatividade do Pequeno-c são, muitas vezes, destinadas a demonstrar que o potencial criativo é universal (Kaufman & Beghetto, 2009). Por exemplo, o conceito de criatividade Pequeno-c tem possibilitado aos investigadores reconhecer e analisar as formas mais omnipresentes de expressão criativa, incluindo a criatividade das crianças em idade escolar (Beghetto & Kaufman, 2007). A categoria Pequeno-c é útil para remover equívocos comuns sobre criatividade, como por exemplo, perceber que o foco na criatividade Grande-C leva à ideia de que apenas algumas pessoas podem ser criativas. Portanto, a categoria Pequeno-c ajuda a sublinhar a importância do papel que a criatividade desempenha na vida quotidiana e aponta para a importância de a identificar e nutrir em ambientes quotidianos, tais como escolas e salas de aula (Kaufman & Beghetto, 2009).

Há uma série de verbos que estão associados à criatividade, como sejam, fazer, planear, projetar, construir, resolver, compor, inventar, descobrir, pesquisar, teorizar, escrever, inovar, relacionar, adaptar, organizar, compor, montar, integrar e interpretar. São todos indicadores de comportamento criativo, passíveis de serem usados tanto para a criatividade do dia-a-dia (Pequeno-c), como para a criatividade ao mais alto nível (Grande-C). Todos os comportamentos produzem resultados ou produtos que podem ser submetidos a um certo grau de avaliação. No nível da criatividade do Pequeno-c, a avaliação pode ser tão simples como a autossatisfação por parte do indivíduo engenhoso que resolve o seu problema imediato. Já a criatividade do Grande-C é, muitas vezes, sujeita a um julgamento por parte de críticos especialistas num determinado campo, que examinam o produto e o validam ou não (Feldhusen, 2006). Tanto as conceções da criatividade Grande-C como as da criatividade Pequeno-c, concentram-se em produtos criativos julgados externamente, embora com níveis diferentes de impacto.

A distinção entre Grande-C e Pequeno-c é um passo importante para o estudo da criatividade, mas grandes limitações conceituais permanecem. Apesar de a criatividade Grande-C estar claramente definida, o mesmo não pode ser dito para a criatividade

Pequeno-c. A criatividade eminente (Grande-C) representa os produtos monumentais e eternos (como as obras de Beethoven, Monet, Mozart, etc.), tudo o resto fica aglomerado na criatividade Pequeno-c. Se alguém é extremamente criativo mas não está ao nível do Grande-C, então é considerado como estando ao nível da criatividade Pequeno-c. Por exemplo, um músico pode ser considerado criativo se a sua música revolucionar um determinado estilo musical (Grande-C). Da mesma forma, um compositor musical pode ser considerado criativo se abordar e adaptar de uma forma original composições musicais *standard* (Pequeno-c). Embora os produtos sejam diferentes na magnitude criativa (Grande-C *versus* Pequeno-c), em ambos os casos a criatividade é determinada pela natureza e o impacto da música, ou seja, pelos produtos criativos (Beghetto & Kaufman, 2007).

Ainda que a distinção entre Grande-C e Pequeno-c seja útil para a compreensão e valorização das contribuições notáveis e duradouras de indivíduos excecionais nalgum domínio, bem como para reconhecer as contribuições de pessoas comuns, os níveis mais subtis da criatividade permanecem (Kaufman & Beghetto, 2009). Infelizmente, ainda é dada pouca atenção no campo da criatividade ao Pequeno-c, às capacidades criativas dos estudantes, às formas como eles aprendem e constroem um novo conceito. Para colmatar esta falta de atenção, Beghetto & Kaufman (2007) propuseram uma nova categoria dentro do Pequeno-c, chamada Mini-c, com o intuito de abranger a criatividade pessoal inerente ao processo de aprendizagem.

A criatividade Mini-c escapa aos padrões tradicionais utilizados para a criatividade Grande-C ou mesmo para a criatividade Pequeno-c mas cabe-lhe, no mínimo, ser vista como um sinal de potencial criativo (Beghetto, Kaufman, Hegarty, Hammond & Wilcox-Herzog, 2012). O Mini-c da criatividade surge da necessidade de especificar de forma mais completa o Pequeno-c, dado que este é um conceito ainda bastante geral, salientando claramente a origem do processo de criatividade de todos os dias (Kaufman & Beghetto, 2009). Desta forma, a criatividade Mini-c refere-se à subjetividade das autodescobertas, isto é, às novas perceções e interpretações pessoalmente significativas, constituindo-se como parte do processo de aprendizagem (Beghetto & Kaufman, 2014; Beghetto, Kaufman, Hegarty, Hammond & Wilcox-Herzog, 2012). É semelhante ao conceito de criatividade pessoal e de criatividade psicológica e refere-se a ideias que são originais para um indivíduo, mesmo que outros já as tenham formulado.

Esta categoria ajuda a ampliar as conceções atuais de criatividade, reconhecendo que perceções e interpretações intrapessoais, que muitas vezes vivem somente dentro da pessoa que as criou, podem ser consideradas ações criativas (Kaufman & Beghetto, 2009). Constitui, portanto, um nível particularmente relevante para entender a criatividade dos jovens no ambiente escolar, como por exemplo, as conexões que estabelecem para desenvolverem novos entendimentos de conceitos científicos e para resolverem problemas matemáticos, usando os seus próprios métodos, em vez de fórmulas anteriormente aprendidas (Lassig, 2012).

Ter uma compreensão mais ampla de criatividade pode ajudar a compreender que os níveis mais modestos (Mini-c e Pequeno-c) são os mais apropriados para serem enfatizados nas salas de aula (Beghetto e Kaufman, 2014). Ao incluirmos o Mini-c nas conceções de criatividade, torna-se mais fácil e prático enquadrar o conceito na vivência escolar, dado que se tomam em consideração os processos criativos individuais envolvidos na construção do conhecimento pelos alunos (Kaufman & Beghetto, 2009; Beghetto & Kaufman, 2007). Portanto, a categoria Mini-c destaca o intrapessoal, foca-se no processo e nos aspetos da criatividade individual (Kaufman & Beghetto, 2009). É uma categoria que ajuda a trazer o nível de especificidade necessário para garantir que o potencial criativo dos alunos é alimentado e não esquecido. Além de que ajuda a prevenir o abandono e perda de alunos com potencial criativo, destacando a importância de reconhecer a criatividade dos mesmos, através das suas interpretações únicas e pessoalmente significativas, à medida que aprendem assuntos novos (Kaufman & Beghetto, 2009).

É claro que a maioria dos professores está consciente de que nenhum dos seus alunos se enquadrará, provavelmente, na categoria Grande-C. Quantos alunos são verdadeiros Albert Einstein ou Mark Zuckerberg? Provavelmente muito poucos ou quase nenhuns. No entanto, e de uma forma geral, os alunos revelam habilidades especiais e únicas às quais é preciso atribuir relevância. Para tal, dado que o uso da categoria Pequeno-c para classificar as capacidades criativas dos alunos pode ser demasiado restritiva, emergiu o nível Mini-c cuja função consiste em destacar uma importante e estreita relação entre aprendizagem e a criatividade.

O desenvolvimento cognitivo e formas posteriores de expressão criativa começam com uma internalização ou apropriação de ferramentas culturais e na interação social (Beghetto & Kaufman, 2007). É importante reconhecer que os fatores individuais e sociais desempenham um importante papel na criatividade dos alunos. Os alunos entram na sala de aula com diferentes interesses, diferentes perceções sobre as suas capacidades e diferentes níveis de conhecimento prévio. Todos esses fatores individuais desempenham um papel no ambiente de sala de aula, designadamente no modo como os alunos estão ou não dispostos a compartilhar as suas ideias criativas, como interpretam o *feedback* sobre essas ideias e como se sentem mais ou menos inclinados a experimentar (Beghetto e Kaufman, 2014).

Uma parte fundamental da escolaridade, particularmente em Matemática, envolve ajudar os estudantes a chegar a respostas corretas. No entanto, sobrevém a preocupação de que a aprendizagem seja sobretudo influenciada por práticas de ensino que se centram em métodos pré-definidos para resolver problemas, sem oportunidades para os alunos desenvolverem uma compreensão pessoalmente significativa desses problemas, bem como das estratégias para chegar às soluções (Beghetto & Plucker, 2006).

Quando encorajados, os alunos não se limitam passivamente a reproduzir informação adquirida, transformam-na e reorganizam-na com base nas suas caraterísticas pessoais e no conhecimento que dominam. Este processo interpretativo e transformador é um esforço criativo do tipo Mini-c. Não quer isto dizer que a aprendizagem e a criatividade sejam a mesma coisa, mas antes que o desenvolvimento do conhecimento e de formas mais elevadas de expressão criativa (por exemplo, Pequeno-c e Grande-C) têm a sua génese nas interpretações Mini-c. Assim, a criatividade Mini-c está na base de toda a criatividade (do Mini-c para o Pequeno-c e posteriormente para o Grande-C) como processo transformador ligado ao desenvolvimento do conhecimento e das habilidades pessoais (Beghetto & Kaufman, 2007). Este nível de criatividade difere das categorias do Pequeno-c e do Grande-C, porque envolve processos criativos envolvidos na aprendizagem e na construção do conhecimento e manifesta-se através da motivação para olhar o mundo objetivo segundo interpretações originais e da capacidade de decidir da sua utilidade (Runco, 2004b). Distingue-se claramente da criatividade Grande-C que depende de julgamentos interpessoais e históricos em termos de novidade, adequação e impacto duradouro (Beghetto & Kaufman, 2007). De acordo com esta perspetiva, a criatividade Mini-c é uma construção que merece a sua própria terminologia, porque as conceções atuais da categoria Pequeno-c não são suficientemente amplas para acomodar os processos criativos pessoais envolvidos no desenvolvimento de novas compreensões e na construção do conhecimento pessoal dos alunos.

A criatividade Mini-c é vista como parte de uma evolução contínua da vida criativa. A argumentação de que todos os indivíduos são criativos começa pela criatividade Mini-c. Na maioria dos casos, a criatividade Mini-c pode tornar-se em Pequeno-c e, em casos extraordinários, a criatividade Pequeno-c pode transformar-se em Grande-C. Noutros casos, o Mini-c pode nunca evoluir. De qualquer modo, a criatividade Mini-c não é apenas relevante para perspetivar uma visão da criatividade dos alunos em idade escolar. Pelo contrário, ela representa as interpretações criativas iniciais que todos os criadores têm, que mais tarde se podem manifestar em criações reconhecidas e, em alguns casos, historicamente celebradas (Kaufman & Beghetto, 2009). A criatividade Mini-c pode ser o ponto de partida para os níveis mais avançados de expressão criativa, não querendo dizer que este processo siga sempre uma progressão linear. Os criadores talentosos podem ir diretamente de ideias Mini-c para inovações Grande-C (Beghetto e Kaufman, 2014). Um indivíduo que trabalhe ao lado de um especialista ou um estudante que participe num projeto acompanhado por cientistas e investigadores, por exemplo, pode adquirir capacidades para a produção de resultados Mini-c que posteriormente podem levar a contribuições Grande-C. De acordo com Beghetto & Kaufman (2007), todas as contribuições julgadas criativas por outros (sejam elas Pequeno-c ou Grande-C) têm a sua génese na criatividade Mini-c. Este estado inicial de criatividade, no entanto, pode dissipar-se se não for alimentado corretamente.

Em suma, a cultura escolar desempenha um papel significativo no desenvolvimento da criatividade dos jovens, uma responsabilidade que não nos podemos dar ao luxo de subestimar. Os estudantes de hoje serão os líderes de amanhã. Não se espera que todos os alunos alcancem o Grande-C da criatividade, no entanto, promover a criatividade do Mini-c e do Pequeno-c nos estudantes tem benefícios significativos para eles como indivíduos e, potencialmente, para toda a sociedade. É altura de ir além da ideia de criatividade como um cliché. Os líderes educacionais podem inspirar salas de aula criativas, garantindo que os professores são formados e treinados para entenderem a sua própria criatividade e a dos seus alunos e integrarem efetivamente a criatividade em todo o currículo (Lassig, 2012).

2.3.3. Criatividade matemática acessível a todos os alunos

A criatividade não é um dom especial que poucos possuem por acaso e nem se adquire numa fase adiantada da vida; nasce com cada um como um potencial, pois a capacidade de produzir algo subjetivamente novo é intrínseca a todos os indivíduos

(Cibulis & Lace, 2008). Por ser um fenómeno que se manifesta onde quer que a inteligência humana esteja ativamente envolvida e por se poder revelar em qualquer pessoa e em qualquer domínio, ao longo da vida, constitui uma parte essencial de uma educação eficaz (Grainger & Barnes, 2006). Neste enquadramento, a educação para a criatividade diz respeito a todos os alunos (Urban, 2007).

O reconhecimento de que a generalidade dos alunos tem potencial para construir significados pessoais é o primeiro passo para reconhecer o seu potencial criativo (Runco, 2003). São muitos os investigadores que corroboram esta posição e que, ao mesmo tempo, defendem que a criatividade deve ser incentivada desde muito cedo, de modo a ajudar os alunos a desenvolverem o seu potencial ao mais alto nível (Steinberg, 2013). No caso da Matemática, a criatividade também se traduz pela capacidade de ter ideias inovadoras, originais e criativas. Trata-se também de um processo mental direcionado para o estabelecimento de novas relações que vão para além das situações rotineiras (Mina, 2008). Implica, evidentemente, mais do que a memorização de factos, regras, técnicas e algoritmos convencionais, requerendo, também, a integração de experiências e a resolução de tarefas que promovam o desenvolvimento de processos criativos para chegar a soluções (Vale & Pimentel, 2011). Deste modo, apesar de a criatividade estar intrinsecamente ligada à Matemática, o sistema de ensino raramente valoriza esta faceta do conhecimento matemático no processo educativo (Silver, 1997).

A expressão criativa dos alunos que gostam de Matemática alia-se à sua geralmente forte inclinação para produzir e exprimir ideias novas e apropriadas, responder a questões, resolver problemas e ultrapassar obstáculos que emergem durante o processo de aprendizagem (Kousoulas, 2010; Hamivand 2012). É uma aptidão ou um tipo de pensamento passível de ser desenvolvido através da prática (Baran, Erdogan & Çakmak, 2011; Silver, 1997). Mas a criatividade nem sempre é visível em contexto de sala de aula, principalmente quando as atividades são focadas em exercícios rotineiros e mecanizados, que valorizam principalmente velocidade e precisão, negligenciando o pensamento criativo. Muitas vezes, os professores não têm consciência do pensamento espontâneo e intuitivo dos alunos, uma vez que nem sempre há espaço para atividades livres, bem como para reflexões informais que são importantes para desenvolver ideias espontâneas e do senso comum. As práticas de sala de aula raramente contemplam tarefas não totalmente formuladas ou abertas, bem como um período de tempo adequado para o envolvimento dos alunos de forma independente (Sriraman, 2008). A maioria das abordagens pedagógicas e curriculares poucas vezes oferece aos alunos uma visão aberta da Matemática, desvalorizando as oportunidades para envolver os alunos em atividades e impedindo um período de trabalho independente prolongado nesse tipo de atividades (Shriki, 2009). A maior parte do pensamento matemático incentivado em ambiente escolar é focado na aprendizagem mecânica, memorização e domínio de inúmeras técnicas para resolver problemas específicos prescritos pelo currículo ou destinados a testes padronizados. (Sriraman, 2008). Muitos professores enfatizam algoritmos, rapidez e precisão ao invés de trabalharem para o desenvolvimento de aplicações criativas dos conteúdos sugeridas pelo seus alunos (Mann, 2006).

A indução e o uso do pensamento matemático não são possíveis se os alunos trabalharem apenas sobre tarefas rotineiras, baseadas na aplicação de algoritmos fornecidos pelo professor e segundo as suas orientações (Freiman, 2006). O conhecimento conceptual está relacionado com autênticas experiências matemáticas propostas aos alunos, em vez da simples replicação de métodos demonstrados (Mann, 2006).

Os alunos não devem ficar limitados a absorver o conhecimento transmitido pelo professor; devem ser preparados para desempenharem um papel autónomo, ativo e responsável durante a sua própria aprendizagem (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009). O professor deve ser mediador e facilitador da aprendizagem, em vez da fonte de todo o conhecimento, fornecendo tarefas aos alunos que lhes permitam usar o seu próprio saber matemático e, ao mesmo tempo, ampliá-lo na busca de uma solução (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009). Pretendem-se, assim, tarefas que apelem à curiosidade, exploração e investigação autónoma, que incentivem o pensamento divergente e, consequentemente, proporcionem processos mentais de ordem superior (Cerqueira & Vale, 2013). Para tal, o professor, deve estar preparado para questões, abordagens e ideias inesperadas, bem como para lidar com os diferentes caminhos que o processo de ensino e aprendizagem pode suscitar (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009).

Ignorar o desenvolvimento da criatividade transmite a imagem de que a Matemática é apenas um conjunto de técnicas e regras a memorizar e, quando tal acontece, a curiosidade natural de muitos alunos bem como o seu entusiasmo pela Matemática podem desaparecer (Shriki, 2009). Deixar de incentivar a criatividade na aula de Matemática implica perder uma oportunidade para desenvolver integralmente a compreensão matemática dos alunos (Mann, 2006).

2.3.4. Importância do currículo para a criatividade matemática

Os alunos que gostam de Matemática exploram-na de forma natural, mas nem sempre é possível estabelecer a ligação entre a curiosidade natural e o currículo prescrito, na sala de aula (Mann, 2005). Os indivíduos com talento matemático, ou com maior apetência pela Matemática, revelam habitualmente criatividade, elevada concentração, intuição, originalidade, persistência e flexibilidade; gostam de atividades diferentes, uma vez que lhes permitem criar algo de novo e, ao mesmo tempo, serem autónomos nas suas abordagens; destacam-se ainda pela sua capacidade mais apurada de comunicar e explicar simbolicamente as suas resoluções (Applebaum, Leikin & Freiman, 2008). O seu progresso na Matemática envolve mais do que simplesmente dominar habilidades de cálculo (Mann, 2005). Evidenciam um pensamento matemático evoluído, capazes de conjugar conhecimento, imaginação e inspiração (Leikin, 2007). Revelam o domínio de um conjunto de habilidades adquiridas através do questionamento, saciando a sua curiosidade por via da manipulação, da experimentação e do jogo (Irish National Teachers' Organisation, 2009). Têm energia e persistência perante situações difíceis, não desistindo, mas encarando-as como desafios. Tipicamente, vão para além da superfície de uma tarefa (Sheffield, 2009). O seu raciocínio matemático criativo revela-se pela habilidade em perceber padrões, através de um pensamento complexo e não necessariamente algorítmico, bem como em usar pensamento original, recorrendo a símbolos e esquemas, dando forma a estratégias diferentes de resolução (Milgram & Hong, 2009). Durante este processo, primam pela elegância matemática e clareza na explicação dos raciocínios utilizados, através de uma variedade de representações, procurando que os seus processos de pensamento sejam compreendidos. Usam o conhecimento do senso comum muito intensamente, reagindo de forma espontânea a ideias novas, a partir das quais são capazes de efetuar saltos cognitivos (Meissner, 2008).

Assim, um ensino da Matemática que não contemple o desenvolvimento do potencial criativo dos estudantes estará a negar a todos, especialmente aos talentosos, a oportunidade de apreciarem a beleza da Matemática (Mann, 2006) e a impedir a revelação das suas faculdades (Freiman & Rejali, 2011).

Partindo do princípio de que todos os alunos têm potencial criativo e podem progredir se tiverem oportunidades para aprender de forma adequada, então, com algum esforço deliberado, a criatividade pode ser desenvolvida nas escolas em todos os alunos, mesmo naqueles que pareceriam não possuí-la (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009;

Vale, Barbosa & Fonseca, 2014). A maior parte dos alunos apenas precisa de oportunidades e de tempo para mostrar o seu potencial criativo.

Por natureza curiosas, as crianças, desde cedo, questionam constantemente o que acontece à sua volta, muito antes mesmo de iniciarem a sua aprendizagem académica (Irish National Teachers' Organisation, 2009). Mas o desenvolvimento dos processos criativos está dependente de professores criativos (Guerra, 2007). Se os professores acreditarem que a criatividade existe como potencial em cada aluno, o fomento dessa capacidade passará a ser uma tendência no processo educacional (Yee, 2008). Porque o desenvolvimento da criatividade só pode ser conseguido num sistema de ensino que tenha por base um currículo globalmente desafiador, a aprendizagem de cada aluno tem de garantir a possibilidade de realizar e partilhar as suas descobertas (Freiman, 2006). Só um modelo curricular incentivador é capaz de detetar talentos criativos e ajudar todos estudantes a aumentar o seu potencial intelectual, assim como a apreciar os resultados e processos matemáticos.

Um modelo inspirador é aquele que não se limita a manter a conformidade com o que já foi ensinado mas que valoriza a capacidade de inventar novos métodos, refinar algoritmos e regras existentes, descobrir novos conhecimentos e novas aplicações, dentro do corpo de conhecimento disponível (Koichu & Andzans, 2009). É um modelo onde o desafio é uma condição necessária para a realização do potencial matemático dos alunos (Leikin, 2011;Irish National Teachers' Organisation, 2009).

Concluindo, os alunos têm imensas capacidades naturais de inovação, pensamento criativo e formas alternativas de ver as coisas que precisam de ser estimuladas para se revelarem (Irish National Teachers' Organisation, 2009). Logo, devem ser constantemente desafiados, num ambiente onde possam questionar e ser questionados e onde nem sempre a resposta a uma questão é imediata (Freiman, 2006). Portanto, é fundamental que a formação matemática escolar contemple a criatividade, de forma a encorajar ideias e produtos originais e, ao mesmo tempo, garantir a sua consonância com os objetivos curriculares (Beghetto, 2007).

A descoberta do talento matemático e o seu desenvolvimento depende da presença da criatividade na experiência educacional, o que implica mudanças ao nível das práticas de sala de aula e dos materiais de ensino (Mann, 2006). Por isso, durante o processo de ensino e aprendizagem, é importante incluir tarefas criativas, não só com o propósito de atender aos alunos talentosos e bem-sucedidos em Matemática, como também àqueles que têm potencial matemático mas a quem a rigidez dos desenhos curriculares impede, muitas vezes, de manifestarem as suas habilidades (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013).

2.3.5. Importância dos professores para a criatividade matemática

A investigação atual em educação matemática assenta na premissa de que a criatividade pode cultivar-se em todos os alunos e pode ser promovida através de tarefas adequadas e desafiantes, que convidem a apreciar a própria natureza da Matemática (Applebaum & Leikin, 2007; Mann, 2005; Pelczer e Rodriguez, 2011; Sheffield 2003; Vale & Pimentel, 2011). Portanto, as tarefas mais interessantes para a promoção da criatividade devem consentir abordagens autónomas, gerar novas intuições sobre as ideias matemáticas subjacentes e, paralelamente, motivar e envolver os alunos na atividade matemática (Leikin, 2009b; Vale, 2012). Tais tarefas devem constituir um desafio intelectual, em si mesmas, promover o pensamento independente, possibilitar uma grande variedade de conexões entre temas matemáticos e outros domínios e, ao mesmo tempo, permitir o desenvolvimento de capacidades matemáticas, como a resolução/formulação de problemas, a comunicação e o raciocínio (Cerqueira & Vale, 2013).

As boas tarefas facilitam a introdução de conceitos matemáticos importantes, constituindo um desafio para os alunos, permitindo-lhes utilizar múltiplas abordagens (NCTM, 2007). São promotoras da criatividade se permitirem operar em diferentes níveis de sofisticação, consentirem soluções que vão desde as mais acessíveis às menos imediatas e mais originais e se incentivarem investigação, discussão e argumentação, permitindo a aplicação, o desenvolvimento e a expansão do conhecimento que os alunos têm (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009).

No entanto, as tarefas não são suficientes por si só. O papel do professor é muito importante para ajudar os alunos a construírem ideias matemáticas e, ao mesmo tempo, a assumirem responsabilidade pela sua própria aprendizagem. (Bulgar, 2008). Uma das condições necessárias para o sucesso na resolução de problemas desafiadores é a atitude do professor; cada palavra ou gesto seu pode afetar o desafio matemático, positivamente ou negativamente (Freiman, 2006). Ao professor cabe promover um ambiente favorável à resolução de tarefas desafiantes, designadamente ao criar nos alunos interesse e vontade em trabalhar nas questões propostas, já que a criatividade dos alunos também depende do modo como se sentem atraídos e determinados a vencer desafios (Cerqueira & Vale, 2013; Silver, 1997).

É da competência do professor desafiar os alunos através de tarefas que os levem a pensar livremente e que permitam diferentes processos de resolução. Faz igualmente parte da ação do professor enfatizar tanto a lógica e o pensamento convergente como a criatividade na resolução de problemas. Compete-lhe ainda ensinar os alunos a levantar novas questões, criar novos problemas e a explorar o uso da Matemática em situações matemáticas e não matemáticas (Freiman, 2006). Portanto, quer o papel e atitude do professor quer o teor das tarefas que ele propõe contribuem francamente para a produção de níveis elevados de pensamento matemático (Bulgar, 2008).

O desenvolvimento profissional dos professores passa, em grande medida, pela capacidade de escolha e análise de tarefas e pela realização de experiências pedagógicas que visem a compreensão profunda dos conceitos matemáticos pelos alunos (Bulgar, 2008; Steinberg, 2013). Os professores têm uma responsabilidade crucial na conceção e seleção das tarefas, ajuizando se as mesmas são adequadas ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e se permitem que eles usem diferentes abordagens e façam conexões e extensões. (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009). Desta forma, proporcionar aos alunos situações e tarefas desafiadoras constitui também um desafio para os professores, quer na fase da sua seleção ou construção quer na orientação do trabalho de sala de aula com base nessas tarefas. Isto implica um conhecimento amplo e profundo da Matemática e de como a ensinar (Vale, 2012).

Sintetizando, é um desafio para a educação matemática a elaboração de propostas didáticas que promovam a criatividade dos alunos e que impliquem mais do que reproduzir informações ou debitar conteúdos (Alfonso & Martínez, 2008). As tarefas têm de ser abertas, motivadoras e apaixonantes, interessantes, contagiantes, desafiantes e gratificantes, ao invés de condicionarem o aluno a procurar uma solução algorítmica, única e óbvia (Amabile, 2012).

2.3.6. Importância do ambiente de aprendizagem para a criatividade matemática

Incentivar a criatividade não depende somente da construção de boas propostas de trabalho e do papel do professor na respetiva exploração didática, mas também da promoção de um contexto globalmente desafiante e construtivo, baseado na consciência de que todos os alunos podem e têm o direito de aprender e de desenvolver e manifestar todo o seu potencial criativo (Irish National Teachers' Organisation, 2009; Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012).

A criatividade envolve uma constante interação dinâmica entre indivíduo, tarefa e ambiente (Sriramam, 2008). Pode ter-se todos os recursos necessários para pensar criativamente mas sem um ambiente favorável e gratificante que estimule, apoie, avalie e melhore as ideias produzidas, a criatividade intrínseca de cada indivíduo nunca poderá ser exibida (Sternberg, 2008). A criatividade depende de contextos assentes num clima de confiança, respeito e ajuda, onde a contribuição individual ou coletiva e a autoconfiança são promovidas (Grainger & Barnes, 2006). Qualquer ambiente criativo terá de incentivar a tomada de riscos e a curiosidade.

Para os alunos se tornarem criativos, imaginativos e capazes de assumir riscos, é importante apoiá-los para que se sintam confiantes, independentemente do caminho que escolham percorrer (Robinson, 2005). Um ambiente favorável será aquele em que levantar questões é visto como tão importante como encontrar respostas (Starko, 2009).

A questão da liberdade de trabalhar matematicamente é fundamental, uma vez que a criatividade se evidencia quando os alunos têm a possibilidade de encontrar e utilizar os seus próprios métodos de resolução (Ching, 1997; Pehkonen, 1997). Quando os alunos têm essa liberdade, são capazes de descobrir formas e métodos interessantes de resolução, mediante as interpretações que fazem, de acordo com o seu próprio entendimento da situação problemática (Ching, 1997). No entanto, é preciso ter em conta que a criatividade precisa de tempo para se desenvolver e prospera com a experiência, sendo a persistência um elemento essencial do trabalho criativo (Liljedahl, 2009; Mann, 2005). Vários autores (Ervynck, 1991; Piirto, 1999; Silver, 1997, Sheffield, 2003, referidos por Applebaum, Leikin & Freiman, 2008) consideram que devem ser oferecidas oportunidades aos alunos para mostrarem o seu conhecimento matemático, criatividade, curiosidade, minúcia e imaginação. Para esse efeito, é essencial que os ambientes de aprendizagem aceitem o risco e disponibilizem o tempo adequado, desafiando as regras e algoritmos e valorizando a inventividade e a livre circulação de ideias (Davis & Rimm, 2004).

Atividades matemáticas desafiadoras, não rotineiras, baseadas na investigação, na exploração e na resolução de problemas, são as que melhor podem ajudar os alunos a demonstrar e a realizar o seu talento (Karp & Leikin, 2009). Em particular, sabe-se que o talento matemático dos alunos se desenvolve mediante formas criativas de resolução e exploração de problemas. A resolução de problemas não estimula apenas o desenvolvimento do raciocínio matemático, é também um meio para desenvolver a criatividade (Mann, 2005; Pereira & Saraiva, 2008). O trabalho criativo focado na resolução de problemas genuínos promove habilidades cognitivas de ordem superior, como o raciocínio, a comunicação e a justificação (Vale, 2012). Por meio da resolução de problemas, muitos alunos ganham maior consciência das suas próprias capacidades (Mina, 2008).

A criatividade desenvolve-se em ambientes de resolução de problemas que incentivam os alunos a ver a essência e os detalhes dos conteúdos trabalhados, a ver conexões e inter-relações entre diversas áreas, a absorver e reagir a novas ideias e a incluir elementos de surpresa no seu trabalho (Gomez, 2007).

Os alunos, especialmente os que têm maior talento matemático, quando trabalham de forma criativa, evidenciam habilidades que incluem a capacidade de transitar entre representações, a comparação de estratégias e de soluções, as conexões entre diversos conceitos e a compreensão de conteúdos matemáticos a partir de diferentes perspetivas. Estes aspetos são uma prova valiosa do desenvolvimento do raciocínio, elevando a criatividade a uma faceta essencial do talento matemático (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013). Sendo assim, urge a promoção de ambientes de resolução de problemas estimulantes, evitando a imposição de estratégias de resolução e incentivando formas de pensar criativas (Mann, 2005, 2006). Isto implica que os alunos se sintam entusiasmados e desafiados a aplicar os seus conhecimentos de forma criativa, encorajados a ensaiar novas abordagens e ideias, que as suas contribuições sejam incentivadas e valorizadas e que o erro seja assumido como parte integrante da experiência de aprendizagem (Irish National Teachers' Organisation, 2009). São muitos os alunos que aprendem e pensam melhor nestes ambientes, que se tornam dedicados, abertos a mudanças, capazes de arriscar e, ao mesmo tempo, despertos para experiências de aprendizagem (Amza & Griffith, 2006).

Nos ambientes que procuram sustentar a criatividade, a inovação desempenha um papel muito importante (Leikin, 2009b). Uma forma útil de conceber a criatividade na resolução de problemas é interpretá-la como a prática de persistir na busca de soluções e conexões não óbvias (Robinson, 2005).

2.4. Resolução de problemas e criatividade matemática

Nas sociedades modernas, a atividade humana é alicerçada na resolução de problemas emergentes. Adaptação, aprendizagem, ousadia para experimentar e estar pronto para aprender com os erros são as chaves para a superação e sucesso num mundo imprevisível (OEDC, 2014).

As mudanças sociais, ambientais e tecnológicas são o reflexo de que o conhecimento aplicável evolui constante e rapidamente. Os alunos preparados para o amanhã precisam de dominar um reportório de factos e procedimentos, lidar com situações desconhecidas e ser capazes de prever as consequências das suas intervenções. Quando solicitados a resolver problemas sem uma solução aparente, os alunos precisam de ser capazes de pensar de forma flexível e criativa e de superar as barreiras que se erguem no caminho para uma solução (OEDC, 2014).

Nos últimos anos tem-se assistido a uma renovada investigação relacionada com as componentes do processo criativo na resolução de problemas, onde a criatividade é identificada com a produção de novas e significativas conexões e influenciada pela capacidade de assumir diferentes pontos de vista e considerar diferentes alternativas (Cerqueira & Vale, 2013). Embora não haja uma definição única de criatividade matemática, é consensualmente aceite que o conceito envolve a resolução de problemas através de novas ideias e abordagens, pressupondo a exploração e a experimentação (Cerqueira & Vale, 2013). O produto criativo está dependente da perceção clara, perspicaz e abrangente dos dados existentes, bem como da informação a procurar e a obter intencionalmente (Urban, 2007; Gomez, 2007), para dar resposta a problemas total ou parcialmente definidos (Sriraman, 2009).

Resolver problemas é a atividade criativa cognitiva mais relevante, seja em ambientes quotidianos ou em contextos profissionais (Elia, Panhuizen-Kolovou & Heuvel, 2009). Constitui uma competência que implica flexibilidade intelectual, incluindo o conhecimento de heurísticas, princípios e habilidades que podem ser úteis para abordar diversos tipos de problemas. Requer a coordenação de variados processos cognitivos e metacognitivos, a seleção e implementação de estratégias adequadas, e o ajustamento do comportamento às exigências dos problemas propostos (Pattivisan & Niess, 2008). A resolução de problemas prepara os alunos para lidar de forma eficaz, independente e hábil com uma variedade de desafios mais ou menos complexos, ocasionando, paralelamente, momentos de crescimento e de produtividade pessoal (Treffinger, 2008). É, pois, a arte de fazer Matemática, que contempla sempre algum grau de originalidade e de criatividade (Polya, 1978). A criatividade matemática materializa-se, na resolução de problemas, com a produção de soluções únicas, inovadoras, elegantes e surpreendentes, sustentadas por pensamento matemático flexível, curiosidade e imaginação (Silver, 1997). Portanto, a resolução de problemas está intimamente relacionada com a criatividade matemática (Pehkonen, 1997; Silver, 1997), contribuindo para que a Matemática seja vista pelos jovens como uma disciplina útil na vida diária (Boavida *et al*., 2008). As suas potencialidades são ilimitadas no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento criativo no domínio escolar (Vale, 2012). Neste sentido, é pertinente contextualizar a criatividade matemática no campo da resolução de problemas, tendo em conta o conhecimento e experiência prévios dos alunos, considerando o seu envolvimento livre na execução das tarefas, através de métodos e estratégias próprias de abordagem aos problemas.

Para além de constituir um objetivo da aprendizagem matemática, a resolução de problemas também é um poderoso meio através do qual os alunos aprendem e desenvolvem habilidades cognitivas gerais, motivando-os para a aprendizagem (Pehkonen, 1997), nomeadamente de conceitos, representações e procedimentos matemáticos (Ponte *et al*, 2007). Trata-se, por isso, de uma competência essencial e transversal a toda a aprendizagem da Matemática, na medida em que estimula um conjunto de habilidades de extrema importância, dentro e fora da sala de aula, como a aquisição de diferentes formas de pensar, de perseverança e de confiança perante situações desconhecidas (NCTM, 2007). Além disso, incute, nos alunos, interesse pela descoberta de conceitos e processos de resolução próprios (Na, Han, Lee & Song, 2007) e promove uma disposição mais criativa para com a disciplina, no sentido de superar a fixação e romper com soluções matemáticas estereotipadas (Haylock, 1997).

Neste sentido, a criatividade faz parte do processo de resolução de problemas, tal como constitui um dos resultados da aprendizagem da Matemática (Leikin, 2011). A identificação do talento matemático, apenas subordinada à velocidade e precisão de cálculo esquece os muitos alunos que são criativos e reflexivos.

As aplicações criativas de conhecimentos matemáticos na resolução de problemas envolvem a conjugação de regras e procedimentos matemáticos em combinações não padronizadas (Pehkonen, 1997; Silver, 1997). Sendo assim, a manifestação da criatividade matemática e consequente materialização pode estar na combinação entre raciocínio lógico (pensamento convergente) e pensamento divergente, dado que, muitas vezes, essa junção produz uma grande variedade de ideias, algumas delas úteis na resolução de problemas (Pehkonen, 1997). O pensamento convergente e o divergente são ambos essenciais na experiência de resolução de problemas. Enquanto que o pensamento convergente enfatiza a reprodução e adaptação do conhecimento existente a novas situações de uma forma mais ou menos lógica, o pensamento divergente envolve a fluência, flexibilidade e originalidade na produção de novas ideias (Gomez, 2007).

A invenção de novos métodos de resolução de problemas é uma das manifestações essenciais da criatividade matemática (Silver, 1997). Mas, não menos importante, é a relação entre a criatividade e a beleza (Mann, 2006). Uma das facetas associadas à criatividade, quer em Matemática, quer noutros domínios, é a qualidade final de um trabalho. Caraterísticas como clareza, simplicidade, brevidade, concisão, estrutura, robustez, inteligência e surpresa são fatores que contribuem para o apelo estético de uma solução (Koichu, Katz & Berman, 2007). Neste sentido, o ato criativo, para além de resultados originais e de soluções corretas pauta-se por produções apelativas e admiráveis (Runco, 2006). Embora a relação entre a criatividade e a beleza ou elegância de uma solução seja complexa, a mente matemática procura o sentido estético em produtos e processos que geralmente vão para além dos algoritmos (Leikin, 2009b). Inevitavelmente, e neste sentido, a elegância e a beleza de uma solução são indicadores de criatividade (Leikin, 2013) e o campo da resolução de problemas constitui um terreno fértil para o desenvolvimento do sentido estético matemático em todos os alunos (Sheffield, 2009; Silver, 1997).

A beleza da solução de um problema depende das experiências proporcionadas aos alunos, no campo da resolução de problemas matemáticos, dado que esse sentido estético está ligado à sensação de descoberta na Matemática e é algo que precisa de ser vivido e experimentado (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Trata-se de associar a expressão criativa à estética dos produtos finais, capacidades que muitas vezes são negligenciadas quando se trabalha com a população escolar, principalmente com alunos talentosos (Aizikovitsh-Udi, 2014). Logo, compreender o desenvolvimento da relação entre criatividade matemática e a estética nos alunos talentosos é fundamental para iniciar e apoiar o seu crescimento. Para tal, é preciso enfatizar não apenas as formas criativas de resolver problemas, mas também a elegância das soluções encontradas (Aizikovitsh-Udi, 2013).

Resolver problemas, desde cedo, pode constituir uma poderosa ferramenta para melhorar a aprendizagem dos alunos e desenvolver a sua criatividade (Steinberg, 2013; Pehkonen, 1997). Problemas motivadores e estimulantes são um meio poderoso para descobrir as habilidades matemáticas dos alunos e estimular o seu interesse pela Matemática (Gusev & Safuanov, 2012; Vale & Pimentel, 2011).

2.4.1. Fluência do conhecimento matemático e criatividade na resolução de problemas

Todos os indivíduos são, até certo ponto, criativos, embora alguns o sejam muito mais do que outros (Gomez, 2007). Ainda assim, é preciso ter conhecimento suficiente sobre um determinado campo para o fazer avançar, pois dificilmente um indivíduo conseguirá ir muito longe em qualquer área se não tiver conhecimentos sobre a mesma. Os indivíduos que revelam grande capacidade de usar o conhecimento que possuem para gerar conhecimento novo têm tendencialmente mais propensão para serem criativos (Sternberg, 2008).

Muitas ideias inovadoras são baseadas em conhecimento já existente, ainda que transferido para um campo bastante diferente daquele de que são originárias (Cropley & Cropley, 2007). Portanto, o conhecimento prévio é a espinha dorsal para a organização de novas informações e determina em que medida são exploradas e desenvolvidas no estudo de conceitos matemáticos (Sheffield, 2009).

No campo da resolução de problemas, a proficiência matemática depende do domínio de conhecimento por parte do solucionador (Mayer, 2006). Nomeadamente, o conhecimento prévio influencia a compreensão dos problemas, bem como a escolha das estratégias de resolução. Na verdade, o conhecimento prévio e as experiências anteriores são tudo o que um solucionador tem para desenhar uma estratégia para atacar um problema. Como resultado, todas as heurísticas de resolução de problemas devem incorporar o recurso a experiências e conhecimento anteriores (Liljedah, 2004). Saber quando e como utilizar o conhecimento anterior para gerar conhecimento novo é de extrema importância na resolução de problemas (Sternberg, 2007).

O ato de resolução de um problema, que envolve mobilizar conhecimento inerente a um domínio de interesse, bem como decifrar os elementos estruturais da situação é, certamente, um exercício de pensamento criativo. Assim, as atividades de resolução de problemas, de acordo com a experiência e nível de conhecimento dos alunos, permitem que estes se aproximem das soluções de formas criativas (Baran, Erdogan, Çakmak, 2011). Bons problemas matemáticos são, por natureza, situações desafiantes que incentivam os alunos a estruturarem o pensamento, de forma a gerarem ligações entre os dados, apoiados na sua experiência anterior (Freiman, 2006). Quando os alunos possuem conhecimento prévio, não precisam desperdiçar capacidades cognitivas na tentativa de reconstruir procedimentos necessários durante o curso da resolução. Por exemplo, se um aluno tiver automatizado procedimentos e noções de aritmética, então pode concentrar-se em recursos mais profundos, nomeadamente na elaboração de um plano, do qual poderão surgir soluções criativas (Mayer, 2006).

A criatividade manifesta-se na resposta a desafios que não têm resolução imediata, dado que os indivíduos criativos optam geralmente por enfrentá-los da maneira mais simples e direta, usando as suas próprias formas de pensar (Orey, 2010). O desafio é potenciado quando os problemas envolvem novidade, dado que isso obriga os alunos a refletirem e estruturarem o pensamento matemático para construírem meios e mecanismos adaptados às novas condições, ativando, ao mesmo tempo, o seu potencial intelectual (Freiman, 2006). A criatividade surge muitas vezes nestas situações; muitos alunos apoiam-se no conhecimento retido na memória de longo prazo e, quando o mesmo não chega, são levados a pensar como o podem usar, daí resultando, por vezes, soluções elegantes e originais (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009). Quando os alunos têm um repertório útil de conceitos e estratégias podem usá-lo para a construção de soluções criativas; por exemplo, no pensamento por analogia, a resolução de um novo problema pode lembrar um outro problema que já tenha sido resolvido e que poderá ser usado como referência para desenvolver um método de resolução para o problema novo (Mayer, 2006). Assim, o conhecimento e experiência anteriores, especialmente decorrentes do trabalho já desenvolvido para resolver problemas similares, são suportes relevantes para os alunos (Gontijo, 2010). Os indivíduos que têm um domínio de conhecimento mais limitado não serão capazes de combinar ideias, fazer associações inesperadas entre diferentes tópicos ou sintetizar factos aparentemente não relacionados, uma vez que não possuem as noções, conhecimentos ou factos sobre os quais trabalhar (Cropley & Cropley, 2007).

Neste enquadramento, a fluência do conhecimento, como um componente crítico de proficiência matemática na resolução de problemas, é a condição considerada necessária para qualquer aluno resolver problemas com sucesso e consiste na capacidade de aplicar estratégias e procedimentos subjacentes com eficiência, precisão e flexibilidade (NCTM, 2014): a *eficiência* implica que um aluno não se atole em muitas etapas ou perca o controle da estratégia seguida, sendo capaz de recorrer ao uso dos resultados intermédios, se necessário; a *precisão* depende de vários aspetos do processo de resolução dos problemas, entre eles, o registo cuidadoso, o conhecimento de combinações numéricas e outras relações importantes, bem como a preocupação com os métodos de verificação e validação dos resultados; e por último, a *flexibilidade* requer o conhecimento de mais do que uma abordagem para resolver problemas, o que possibilita a escolha de uma estratégia adequada e, ao mesmo tempo, o uso de um método eficaz de verificação dos resultados (Russel, 2000). Portanto, a fluência do conhecimento matemático exige mais do que a memorização de factos ou procedimentos e é mais do que compreender e ser capaz de usar um determinado procedimento para uma determinada situação (NCTM, 2014; Russel, 2000).

Os alunos que memorizam conceitos e procedimentos que não entendem têm menos motivação para compreenderem o significado ou o raciocínio por detrás deles (NCTM, 2014). Por isso, a fluência do conhecimento matemático como elemento crítico da proficiência na resolução de problemas, para além do que já foi mencionado, também implica: a habilidade de transferência de procedimentos para diferentes problemas; a construção ou modificação de procedimentos a partir de outros procedimentos; e o reconhecimento de quando uma estratégia ou procedimento é mais adequado do que outro. Além do mais, os indivíduos fluentes matematicamente apresentam níveis mais baixos de ansiedade e, consequentemente, envolvem-se nas atividades com mais frequência, durante mais tempo e mais intensidade do que os sujeitos com baixa fluência (Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008). Logo, o desenvolvimento da fluência do conhecimento matemático depende das experiências dos alunos na integração de conceitos e procedimentos adquiridos, para através deles construírem as suas próprias estratégias e procedimentos relacionados.

Ser fluente em Matemática não é diferente de ter fluência básica em qualquer idioma. Tal como tornar-se fluente numa língua, em particular, aprendendo a comunicar com as palavras e estruturas associadas, o processo de tornar-se matematicamente fluente está relacionado com o modo como a compreensão dos alunos no uso de uma linguagem quantitativa e das ideias que lhe estão subjacentes é desenvolvida ao longo do tempo (Benjamin, Foy, Konowitch & Mauprivez, 2013).

A compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos, das operações e das relações, é reveladora do entendimento integrado e funcional das ideias matemáticas dos alunos. A aprendizagem com compreensão é mais poderosa do que simplesmente o recurso à memorização, porque facilita e melhora a retenção, promove a fluência do conhecimento matemático e facilita a aprendizagem de novos assuntos relacionados. Os estudantes que atingiram a compreensão dos conceitos sabem mais do que factos e métodos isolados, eles entendem porque é que uma ideia é importante e os tipos de contextos em que é útil. Organizam os seus conhecimentos num todo coerente que lhes permite aprender novas ideias, ligando-as ao que já sabem. A compreensão conceptual suporta a retenção das ideias porque os factos e métodos aprendidos com compreensão estão conectados e, portanto, são mais fáceis de lembrar e usar, podendo ser reconstruídos quando esquecidos. Se os alunos compreenderem um método, são suscetíveis de o lembrar corretamente e monitorizá-lo de acordo com as suas lembranças para tentar descobrir se faz sentido, explicando-o para si próprios e corrigindo-o se necessário. O conhecimento conceptual associado à compreensão fornece a base para a geração de novos conhecimentos, bem como para a resolução de problemas novos e desconhecidos, sendo que a fluência matemática é facilitada pela rapidez e precisão em recordar factos ou soluções simples de matemática (Benjamin, Foy, Konowitch & Mauprivez, 2013).

Quando os estudantes compreendem os conceitos e procedimentos, tais como o valor posicional ou o sentido das operações, eles podem estendê-los para novas áreas do conhecimento matemático. Em sentido complementar, a compreensão conceptual ajuda os alunos a evitar erros críticos na resolução de problemas, particularmente erros de magnitude. Por exemplo, se os alunos multiplicarem 9,83 por 7,65 e obtiverem 7.519,95 como solução, eles podem decidir imediatamente que não está certo, uma vez que sabem que 10 x 8 = 80, e consequentemente podem suspeitar que há um erro nas casas decimais e verificar essa eventualidade (NRC, 2001).

Embora o conhecimento de conceitos seja fundamental, o conhecimento processual não é menos importante. Todos os alunos precisam de um conhecimento profundo e flexível de uma variedade de procedimentos, juntamente com a capacidade de fazer julgamentos críticos sobre os procedimentos ou estratégias apropriados para usar em situações particulares (NCTM, 2014). É importante que os procedimentos sejam eficientes para serem usados com precisão e resultarem em respostas corretas. Tanto a precisão como a eficiência podem ser melhoradas com a prática e podem ajudar os alunos a manter a fluência do seu conhecimento matemático. Além disso, os alunos também precisam de ser capazes de aplicar procedimentos de forma flexível, uma vez que nem todas as situações são iguais, variando, por exemplo, na necessidade de valores exatos. Às vezes, o uso de uma calculadora é mais eficaz do que o recurso ao papel e lápis, sendo necessário que os alunos saibam como selecionar as ferramentas mais apropriadas a cada situação (NRC, 2001).

A fluência processual, por exemplo, suporta a análise de métodos próprios de cálculo, tais como procedimentos escritos ou mentais utilizados na execução das operações aritméticas, possibilitando a extensão da fluência de cálculo e a sua aplicação a todas as questões matemáticas. Na álgebra, para tomar outro exemplo, pretende-se que os alunos desenvolvam procedimentos gerais com variáveis para eficientemente os aplicarem à resolução de problemas específicos. No caso da geometria, ainda, a fluência processual pode evidenciar-se na habilidade dos alunos para analisarem e aplicarem uma série de transformações geométricas ou na sua capacidade de executar um processo de medição com precisão e eficiência (NCTM, 2014). Sendo assim, a fluência processual e a compreensão conceptual estão interligadas, dado que o entendimento significa uma aprendizagem mais fácil, menos suscetível de conduzir a erros comuns e menos propensa ao esquecimento. Da mesma forma, o uso de procedimentos pode ajudar a fortalecer e desenvolver esse entendimento. Por exemplo, é difícil para os alunos compreenderem os cálculos com números que contêm vários dígitos se eles não alcançarem um nível razoável de habilidade em cálculos com números simples. Por outro lado, se os alunos aprenderem processos sem compreensão pode ser difícil levá-los a compreender as razões subjacentes aos procedimentos implicados (NRC, 2001).

Sem fluência processual suficiente, os alunos têm dificuldade em aprofundar a compreensão de ideias matemáticas ou em resolver problemas de Matemática. A atenção que dedicam aos resultados que devem recordar ou aos passos que têm de efetuar para calcular um valor impede-os frequentemente de verem relações importantes. Além disso, os estudantes que aprendem procedimentos sem entendimento, de uma maneira geral, pouco mais conseguem fazer do que aplicar os procedimentos adquiridos, ao passo que os estudantes que aprendem com compreensão podem modificar ou adaptar procedimentos para torná-los mais fáceis de usar. Por exemplo, os estudantes com conhecimento limitado da adição precisariam normalmente de papel e lápis para adicionar 598 e 647. Os alunos com compreensão reconheceriam que 598 é 600 menos 2 unidades, optando por adicionar 600 a 647 e, de seguida, subtraindo duas unidades à soma obtida (NRC, 2001).

O desenvolvimento da fluência do conhecimento matemático dos alunos é suscetível de ser incentivado através de problemas que poderão originar múltiplas questões e permitir também várias resoluções corretas (Silver, 1997). A fluência, seja processual seja conceptual, é fundamental durante todo o processo de resolução de problemas. Existe uma relação de apoio mútuo entre a competência estratégica, fluência conceptual e fluência processual na abordagem a um problema. Os alunos desenvolvem a fluência processual quando usam a sua competência estratégica para escolherem procedimentos eficazes. Aprendem, também, que resolver problemas de Matemática depende da capacidade de realizar procedimentos prontamente e, em contrapartida, que a experiência de resolver problemas os ajuda a adquirir novos conceitos e habilidades (NRC, 2001). Desta forma, a fluência do conhecimento matemático requer uma base de entendimento conceptual, raciocínio estratégico e capacidade de resolução de problemas; cresce a partir da exploração e discussão de conceitos, do uso de estratégias, da produção de raciocínios e da execução de operações, com vista a desenvolver métodos matemáticos gerais (NCTM, 2014).

Especificamente, a resolução de problemas de Matemática que incorporam linguagem natural e texto, símbolos e operações matemáticas depende da fluência conceptual para a compreensão da tarefa, da fluência linguística no idioma utilizado e da fluência processual para a realização das operações matemáticas necessárias. Um aluno fluente matematicamente é capaz de ler problemas de forma expedita e corretamente, obter as respostas com rapidez e precisão ou mesmo completar partes do problema com relativa facilidade. Já um aluno com dificuldade, ao contrário, vacila ao ler problemas, executa procedimentos matemáticos simples com hesitação e pode supor que as frases do enunciado indiciam determinados tipos de cálculos. Quando os alunos não têm fluência, nomeadamente, nas operações básicas, a sua aplicação e execução na resolução de problemas podem tornar-se dolorosamente lentas, difíceis e portadoras de erros (Blinder, Haughton & Bateman, 2002). Quando os alunos não têm fluência na escrita de letras e algarismos, descodificação de palavras e capacidade de resolver problemas aritméticos básicos, normalmente têm dificuldade em combinar essas habilidades em situações problemáticas mais elaboradas e complexas.

Uma das formas mais frequentes de alcançar a fluência, qualquer que seja o domínio, é praticar e dominar os elementos básicos do conhecimento e, por isso mesmo, é importante não avançar para habilidades mais complexas quando o fundamento básico não é fluente (NCTM, 2014). Logo que as habilidades matemáticas básicas são dominadas o desenvolvimento das mais difíceis torna-se mais ágil. Por exemplo, se as habilidades básicas aritméticas não são dominadas, o desenvolvimento de habilidades de ordem superior, como a adição de múltiplos dígitos, a divisão longa e o uso de frações, pode ser gravemente afetado (Benjamin, Foy, Konowitch & Mauprivez, 2013). Portanto, a fluência em competências matemáticas básicas liberta a atenção para a criatividade na resolução de problemas (Blinder, Haughton & Bateman, 2002).

Em jeito de conclusão, a importância de ser fluente em habilidades matemáticas, nomeadamente nas básicas, pode levar ao sucesso com a Matemática a longo prazo, bem como à aprendizagem de conteúdos mais avançados de Matemática. (Benjamin, Foy, Konowitch& Mauprivez, 2013). Para tal, todos os alunos precisam de se apropriar de um conhecimento profundo, flexível e fluente, bem como de uma variedade de procedimentos associados à capacidade de fazer julgamentos críticos sobre os procedimentos ou estratégias apropriados em situações particulares e contextualizadas (NCTM, 2014). A fluência deve ser, pois, um critério essencial em qualquer programa de Matemática, nomeadamente para que os alunos progridam suavemente no processo de aprendizagem, construindo cada etapa seguinte sobre etapas prévias de capacidades e conhecimentos (Blinder, Haughton & Bateman, 2002). Para além disso, a fluência matemática também é importante para evitar a dependência de fontes externas (como por exemplo o recuso a calculadoras) na execução dos procedimentos mais elementares. Ao melhorar a fluência desenvolve-se mais confiança e menos dependência (Benjamin, Konowitch, & Mauprivez, 2013). Deste modo, são primordiais as práticas pedagógicas que ajudem os alunos a conectar procedimentos e conceitos, bem como ofereçam oportunidades para testar estratégias e para justificar os processos (NCTM, 2014).

2.4.2. Alunos criativos na resolução de problemas

Muitas vezes, a criatividade matemática é evidenciada quando os alunos têm a possibilidade de combinar diferentes modos de pensar num problema (Hashimoto, 1997). O tratamento de situações complexas e diversificadas oferece aos alunos a oportunidade de pensarem por si próprios, de construírem estratégias de resolução e argumentações na busca de uma solução (Gontijo, 2006). Esta liberdade que os alunos têm de raciocinar, permite-lhes descobrir formas interessantes de resolver problemas (Ching, 1997).

Tal como a competência estratégica e a capacidade de trabalhar de forma flexível, também a expressão criativa é um indicador da capacidade matemática dos alunos e um elemento essencial na atividade de resolução de problemas (Silver, 1997; Vale, 2012). Os alunos matematicamente criativos são, ao mesmo tempo, bons solucionadores de problemas (Baran, Erdogan, Çakmak, 2011). Em geral, revelam flexibilidade de pensamento matemático, uma vez que resolvem problemas de diferentes formas, através de uma ampla gama de estratégias de resolução e lançando mão de uma variedade de representações (Budak, 2012). Mostram-se capazes de recolher facilmente informações úteis para definir uma estratégia e encontrar uma solução, recorrendo a representações mentais coerentes dos elementos envolvidos e das relações entre eles, além de planearem estratégias para superar obstáculos, analisando criticamente cada passo e refletindo sobre possíveis alternativas (OCDE, 2014). Processam informação de forma flexível, através de métodos de resolução e de representação reversíveis e apropriados, revendo constantemente as estratégias e métodos utilizados (Sheffield, 2008). Generalizam ideias matemáticas, além de as aprenderem e compreenderem rapidamente (Bulgar, 2008). Esforçam-se para superar obstáculos e para suportar e provar os seus pontos de vista (Sternberg, 2008; Sternberg, 2007). São capazes de modificar e adaptar estratégias e recursos para corresponderem à exigência das tarefas, conseguindo usar várias técnicas diferentes para encontrar uma resposta. A capacidade para trabalhar de forma flexível, modificando o comportamento, de acordo com as situações e as condições que estão em jogo, é uma caraterística importante na resolução de problemas e que determina, em grande medida, a aptidão que os alunos têm para lidar com situações novas (Elia, Panhuizen-Kolovou & Heuvel, 2009).

Os alunos que gostam de resolver problemas de Matemática têm mostrado capacidade de produzir respostas originais nunca antes encontradas (Ching, 1997). Em muitos casos, resolvem problemas de formas distintas das dos restantes colegas (Applebaum, Leikin &, Freiman; Sheffield, 2008; Sternberg, 2008; Sternberg, 2007), produzindo soluções elegantes pelo facto de não se limitarem ao uso de algoritmos, regras e procedimentos (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012; Demetriou, 2004). Acima de tudo estão dispostos a enfrentar o fracasso e as frustrações parecem motivá-los para um esforço maior (Gomez, 2007). São persistentes, pensam de forma inovadora e seguem abordagens próprias, sem medo de experimentar métodos invulgares; revelam curiosidade pelas conexões e relações matemáticas e esforçam-se para que a Matemática faça sentido, questionando-se a si e aos outros sobre os problemas, e primam pela elegância e clareza durante a explicação do raciocínio (Sheffield, 2008). São céticos perante as ideias convencionais e estão dispostos a assumir os riscos intelectuais associados à descoberta e a defender as suas próprias ideias (Sternberg, 2007, 2008). Combinam habilidades matemáticas com caraterísticas psicológicas que lhes permitem formalizar e generalizar, tal como para compreender as relações entre conceitos, dados e modelos e, assim, resolver problemas matemáticos com sucesso (Freiman, 2006).

O desenvolvimento da personalidade e das caraterísticas individuais dos alunos é fundamental, desde cedo, para o crescimento do seu talento, nomeadamente, da autoconfiança, da coragem para enfrentar desafios, da perseverança ou do prazer de conquista. Alunos com tais caraterísticas aproveitam melhor as suas potencialidades, uma vez que se envolvem na resolução de problemas de forma corajosa, sem temer correr riscos e adquirem conhecimento e habilidades mais rapidamente (Perleth & Wilde, 2007).

2.4.3. Tarefas de resolução de problemas e a influência do tempo

Incentivar a criatividade contribui para a aumentar a vivacidade, o entusiasmo e o gosto pelo desafio na resolução de problemas (Treffinger, 2008). Atividades de resolução de problemas são fundamentais para estimular a criatividade matemática, desde que: questionem e façam pensar profundamente, mesmo sobre conceitos simples; permitam a construção do conhecimento a partir da experiência anterior; promovam uma ampla gama de oportunidades para explorar, ampliar e diversificar o conhecimento; permitam usar linguagens das mais variadas formas (verbais, geométricas, gráficas, algébricas, numéricas, etc.) para comunicar matematicamente; deem lugar a conexões com diferentes áreas da matemática e com áreas do mundo real; facilitem o uso adequado de tecnologia, nomeadamente, calculadoras, computadores, quadros interativos, etc; incentivem a reflexão individual e disponibilizem tempo para que os alunos se envolvam ativamente; sejam abertas, com mais do que uma forma de resolução e com mais do que uma resposta certa; exijam conhecimento anterior e, ao mesmo tempo, envolvam conceitos e técnicas ainda não ensinados explicitamente (Pattivisan & Niess, 2008; Sheffield, 2008).

A metodologia de resolução de problemas é apropriada para o desenvolvimento da criatividade em Matemática no contexto educacional (Gontijo, 2010). É importante que os estudantes utilizem as suas próprias maneiras de resolver problemas e, quando necessário, gerem novos produtos, soluções e resultados. Isto inclui criar oportunidades para que os alunos compreendam que o uso do seu pensamento imaginativo (Mini-c) pode levar a novas formas de ver as coisas (Beghetto e Kaufman, 2014). A invenção de um novo método de resolução de problemas ou algoritmo é uma das manifestações essenciais tanto da criatividade matemática absoluta como da criatividade matemática relativa (Silver, 1997). Sendo assim, um ensino da Matemática apostado em desenvolver a criatividade requer problemas que permitam métodos distintos de resolução e que, ao mesmo tempo, incentivem os alunos a ir para além do conhecimento que já dominam em busca da solução (Mann, 2006). Incorporar a criatividade no ensino diário envolve atividades que exijam a produção e registo de diferentes ideias e que, ao mesmo tempo, incentivem os alunos a redefinir problemas, usar analogias, pensar de maneiras diferentes e avaliar as ideias e produtos que geram (Beghetto & Kaufman, 2014).

No entanto, a criatividade precisa de tempo para se desenvolver e prospera com a experiência (Mann, 2005). Para além de estar relacionada com a inclinação e conhecimento pessoais, a criatividade também está associada a longos períodos de trabalho (Zazkis & Holton, 2009; Silver, 1997). Os princípios educacionais subjacentes ao ensino para a criatividade devem apoiar os alunos na forma de circunscrever um problema e dar-lhes o tempo útil necessário para fazerem conexões interessantes e inovadoras na procura de uma solução (Gomez, 2007). Os alunos precisam de tempo para mergulharem profundamente num problema e, simultaneamente, é desejável que se sintam confortáveis para se aventurarem por caminhos desconhecidos (Bulgar, 2008).

A compreensão dos alunos desenvolve-se a partir de um equilíbrio entre a busca de métodos eficientes para alcançar soluções e oportunidades envolvimento num processo criativo. Isto impõe que os alunos disponham de tempo e que realizem as experiências necessárias para desenvolverem a compreensão de um problema particular ou de um conjunto mais amplo de problemas. Principalmente quando surge um impasse, a possibilidade de colocar um problema de lado temporariamente ativa nos alunos criativos a mente inconsciente para alcançar associações e conexões que a mente consciente não é capaz de fazer. A incubação pode ocorrer durante um longo ou durante um curto período de tempo (Gomez, 2007).

Resolver problemas deve significar liberdade para os alunos se questionarem, tecerem conjeturas e tentarem prová-las, explorarem e refletirem sobre ideias, situações, ações e resultados, e comunicarem processos e raciocínios (Samaniego, 2008). O envolvimento significativo, ao longo do tempo, com problemas matemáticos, permite aos alunos construírem, encontrarem e definirem eficazmente esquemas e estratégias importantes de resolução (Powell *et al*, 2009). É no jogo de formulação e reformulação, nas tentativas de resolver e explorar um problema que se vê a criatividade dos alunos e se pode perceber em que medida essa criatividade é evidente (Silver, 1997). São poderosos os benefícios obtidos quando os alunos demonstram um envolvimento ativo em tarefas de resolução de problemas, dado que isso significa que conseguem apropriar-se do que estão a fazer, de forma mais energética e diligente no decurso de longos períodos de tempo (Treffinger, 2008). Não quer isto dizer que não devam ser ensinados aos alunos métodos eficientes para resolver problemas, mas antes que lhes deve ser dada a oportunidade de trabalharem à sua maneira, de modo a desenvolverem uma compreensão pessoalmente significativa das situações propostas (Beghetto & Plucker, 2006).

2.4.4. Atividades extracurriculares no desenvolvimento da criatividade

Por todas as razões mencionadas anteriormente, a resolução de problemas e a promoção de habilidades de pensamento de ordem superior devem ser o foco principal da educação matemática (Koichu & Andzans, 2009). Portanto, "a resolução de problemas deve ser o eixo de toda a educação matemática, uma vez que promove desenvolvimentos cognitivos de alto nível e o saber relacionar a matemática com o mundo real" (Fernandes, 1994b, p. 137).

A Matemática torna-se mais interessante se for apresentada como algo mais do que os conteúdos, como uma disciplina em que os alunos podem usar todos os métodos e estratégias ao seu alcance para compreender, abordar e resolver problemas (Zazkis & Holton, 2009). A criatividade matemática é difícil de desenvolver se a atividade matemática estiver limitada a regras e a exercícios de aplicação das mesmas (Mann, 2006). Resolver problemas, pelo contrário, leva os alunos a colocar em prática a sua criatividade matemática (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Nomeadamente, a ênfase na validação e justificação das soluções, pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, indispensável ao pensamento criativo (Samaniego, 2008).

O papel da resolução de problemas é duplo: para além de incentivar a criatividade dos alunos, constitui, também, um meio para esta ser avaliada (Levav-Waynberg & Leikin, 2009). No entanto, a Matemática ensinada e avaliada nas escolas, no que toca à resolução de problemas matemáticos, afasta-se frequentemente do incentivo à criatividade pois impulsiona os alunos para o pensamento convergente, baseado em processos de rotina e execução de algoritmos, descurando oportunidades para a manifestação de pensamento matemático divergente (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Numa vertente de incentivo à criatividade matemática, é essencial desenvolver nos alunos as diversas dimensões da criatividade, como fluência, flexibilidade e originalidade, a estética matemática (Leikin & Lev, 2013; Presmeg, 2013) ou a admiração pelas ideias surpreendentes (Baran, Erdogan, Çakmak, 2011).

Vários fatores influenciam o desenvolvimento do potencial criativo, incluindo as diferenças individuais, os tipos de experiências e oportunidades que os criadores têm ao longo da sua vida. Mas quando se trata de nutrir a criatividade, o ambiente de aprendizagem é um dos fatores mais importantes, uma vez que determina, em grande parte, se o potencial criativo é suportado ou suprimido (Beghetto e Kaufman, 2014). O talento e a criatividade matemática não são traços intrínsecos dos indivíduos; precisam de ser estimulados e alimentados através de ambientes motivadores e desafiantes que podem, em certos casos, encontrar-se em atividades extracurriculares. Entre essas, contam-se os campeonatos de resolução de problemas, atualmente bastante difundidos em todo o mundo.

As competições matemáticas, para além da sala de aula, constituem iniciativas poderosas para incentivar a prestação dos alunos ao mais alto nível; impulsionam o conhecimento e pensamento matemáticos, bem como as competências a eles associadas e promovem o desenvolvimento de abordagens mais criativas aos conteúdos (Bonka & Andzans, 2008). Podem ser encaradas como ambientes criativos, onde é permitido trabalhar e pensar numa atmosfera livre de pressão e ansiedade e sem medo de errar; aguçam a curiosidade e oferecem situações desafiadoras que estimulam e exigem o comportamento criativo; incentivam o pensamento independente, permitem a exploração do erro como parte integrante da procura do caminho para uma resposta e demonstram tolerância e mesmo apreço relativamente a pensamentos incomuns, ideias originais e produtos criativos (Urban, 2007). Alguns destes campeonatos de resolução de problemas disponibilizam o tempo de que os alunos precisam para o desenvolvimento da criatividade, o qual, muitas vezes, não existe em sala de aula devido à imposição de tempos pré-estabelecidos justificados pelo cumprimento do currículo. Além disso, representam atividades tendencialmente divertidas e não repetitivas, planificadas em torno de objetivos que complementam e enriquecem eficazmente o currículo de Matemática (Starko, 2009).

2.5. Competições de resolução de problemas para além da sala de aula

O fenómeno da criatividade pode ter lugar em qualquer contexto matemático e não apenas na sala de aula (Applebaum & Saul, 2009). A comunidade científica reconhece hoje a importância das atividades extracurriculares em que os jovens estão cada vez mais envolvidos, demonstrando um crescente interesse em estudar os seus potenciais benefícios para a aprendizagem formal da Matemática (Barbeau & Taylor, 2009; Jacinto & Carreira, 2012).

Harrison (2006) identificou uma sobreposição entre os conhecimentos adquiridos fora da escola e aqueles que são tipicamente baseados na aprendizagem escolar. Para este autor, a aprendizagem que tem lugar para além da sala de aula não pode ser negligenciada e, pelo contrário, deve ser encarada como enriquecimento do currículo escolar. Portanto, a aprendizagem desenrolada noutros contextos, para além da sala de aula, entrecruza-se com a que acontece em meio escolar: uma invade a outra. Neste sentido, são vários os autores que destacam a importância de investigar os processos que os alunos desenvolvem na atividade de resolução de problemas, fora da sala de aula, em particular quando os problemas estão relacionados com conceitos matemáticos essenciais (English, Lesh & Fennewald, 2008; Barbeau & Taylor, 2009).

A competição é essencial e intrínseca à vida. É uma apetência dos seres humanos competirem entre si, evidenciando um desejo inato de se compararem e destacarem uns dos outros. O desejo de competir e superar desafios está profundamente enraizado na natureza humana e tem sido utilizado desde há séculos para incentivar as pessoas a melhorarem as suas habilidades e o seu desempenho em várias atividades (Kenderov, 2006). Em especial, a relação entre educação e competição é digna de nota, na medida em que a segunda mostra ter um impacto positivo sobre a primeira (Kenderov, 2006).

Seria uma ilusão pensar que os alunos só podem desenvolver as suas potencialidades em qualquer área do conhecimento através dos sistemas escolares regulares. A aprendizagem não se limita apenas à sala de aula; há uma diversidade de alternativas e de projetos que procuram captar a atenção, o interesse e o entusiasmo dos estudantes. E se a sala de aula não é senão um dos possíveis contextos do processo educativo, há que reconhecer o impacto e as potencialidades das competições relacionadas com a educação, nomeadamente as que acontecem para além do contexto escolar.

A resolução de problemas, numa vertente competitiva, é um contexto muito específico de atividade matemática (Subramaniam & Chia, 2007). A preparação para a resolução de desafios matemáticos em contextos competitivos pode ter um poderoso impacto positivo na vida académica dos alunos (Treffinger, 2008). Este tipo de atividades extracurriculares torna possível a revelação das habilidades e potencialidades dos alunos talentosos, que gostam de Matemática e que aí encontram um grau de desafio que não encontrariam em meio escolar (Kenderov, 2006). Portanto, uma das razões para incentivar os alunos a participarem nestas competições está relacionada com a possibilidade de promover as suas capacidades, de acordo com o seu talento e interesses, sendo fundamental o apoio e o incentivo por parte dos pais e dos professores (Perleth & Wilde, 2007).

Partindo do princípio que todos os alunos têm potencial matemático, a um nível significativo, as competições de resolução de problemas, para além da sala de aula, podem oferecer um meio interessante para desenvolver esse potencial (Taylor, 2009). Também por isso são cada vez mais as oportunidades que surgem, em contexto extraescolar, de envolver os estudantes no mundo da Matemática, com uma maior liberdade para aprenderem e trabalharem em desafios matemáticos. A nível mundial, são várias as organizações que desenvolvem atividades extracurriculares de enriquecimento matemático para além da sala de aula, alimentado aptidão de resolução de problemas dos alunos, através de competições e torneios de diferentes tipos, como por exemplo:

- *Projeto NRICH (Reino Unido)* começou em 1996, com o intuito de criar um centro permanente para o enriquecimento curricular de matemática. Os objetivos centrais consistem em promover o interesse dos alunos pela matemática e elevar os seus padrões de desempenho, apoiar o potencial matemático dos alunos talentosos e dar resposta às necessidades educativas de alunos excecionais. Este projeto visa apoiar a aprendizagem matemática dos alunos com talento matemático, através da resolução de problemas, quebra-cabeças, jogos, etc. Os problemas disponibilizados têm por intuito serem desafios não rotineiros, pensados para estudantes de doze e treze anos, onde as soluções e a comunicação são os elementos-chave de todos os problemas. A avaliação feita a este projeto indicou que os professores se mostraram geralmente satisfeitos com os materiais e o tipo de problemas apresentados, usando-os, muitas vezes, como recursos adicionais para ensinar e desenvolver conteúdos; e ajudou os alunos a desenvolveram uma visão mais rica da matemática, por terem tido acesso a problemas de matemática interessantes e mais estimulantes do que os disponibilizados na escola (Jones & Simons, 1999).

- *Projeto CAMI (Canadá)* criado para responder à mudança curricular realizada no Canadá, no final dos anos 90, fornecendo aos professores e alunos um banco de problemas desafiantes, levando o ensino e aprendizagem da matemática para além da sala de aula tradicional. Tem como objetivo principal fomentar a aprendizagem e a literacia matemática, num contexto desafiante de resolução de problemas. Os seis anos de implementação do CAMI apresentam resultados que apontam para os benefícios da introdução de problemas não rotineiros e abertos na prática de resolução de problemas. O projeto ajudou a criar novas oportunidades para desenvolver as habilidades de comunicação dos alunos. De acordo com os investigadores envolvidos no projeto (Freiman & Lirette-Pitre, 2005, 2006, 2008; Freiman, Vézina & Langlais, 2005; Freiman, Vézina & Gandaho, 2005; Freiman & Manuel, 2007), os dados resultantes dos estudos feitos durante os seis anos de implementação do projeto revelaram que os alunos, para além de gostarem dos problemas disponibilizados, por serem bons, interessantes, divertidos e agradáveis, também ajudaram a aprender a resolver problemas e a melhorar as suas capacidades. Desta forma, o CAMI pode ser visto como uma fonte de recursos de ensino e aprendizagem, para além da sala de aula, complementar às atividades desenvolvidas nas aulas de matemática (Freiman & Lirette-Pitre, 2008).

- *Campeonato de Resolução de Problemas SUB12 (Portugal)* surgiu no ano lectivo 2005/2006, dirigido a alunos do 2º Ciclo do ensino básico, realizando-se através da *Internet*, como um complemento às atividades matemáticas desenvolvidas em sala de aula. Tem como objetivo colmatar algumas das limitações sentidas pelos professores, em contexto escolar, nomeadamente, a dificuldade em implementar um trabalho regular e sólido no campo da resolução de problemas. É uma atividade competitiva extracurricular, com potencialidades pedagógicas importantes na promoção da resolução de problemas e da criatividade, uma vez que permite aos alunos utilizar métodos e estratégias próprias, com a obrigatoriedade de apresentar todo o processo de resolução, contendo a totalidade do raciocínio utilizado, numa linguagem o mais clara possível. Segundo Alvarenga e Vale (2007), "comunicar uma ideia ou um raciocínio, oralmente ou por escrito, de modo que seja claro não é fácil, pois exige sobretudo organização e clarificação das ideias e raciocínios" (p. 49). Durante o desenrolar do Campeonato SUB12 é dado um *feedback* individual, que assume um papel informativo e formativo, com o intuito de ajudar os concorrentes a completar e corrigir as resoluções por si próprios, até serem validadas. O *feedback* é dado de modo a não fornecer a resposta ao aluno, guiando-o no processo de construção da resolução, através de indícios, pistas, exemplos ou contraexemplos, etc., respeitando os raciocínios utilizados e os processos de resolução demonstrados. Desta forma, o SUB12 é uma atividade de carácter formativo, uma vez que permite aos alunos melhorarem as suas resoluções (Jacinto, 2008).

- *Jeu-Concours Kangourou des Mathématiques (França)* é um concurso de Matemática mundial, para alunos do 5.º ao 12.º ano, organizado em várias categorias, de acordo com os níveis de ensino. Nasceu na Austrália, como um concurso nacional que abrangia todos os alunos interessados em participar, tendo por base uma prova de 24 questões matemáticas, com respostas de escolha múltipla, a resolver no menor tempo possível. Em França, na década de noventa, professores franceses tomaram a iniciativa de implementar este concurso no seu país, dando-lhe a designação de Canguru Matemático como tributo ao local de origem. A massiva participação de jovens no Canguru francês suscitou o interesse e o entusiasmo de países vizinhos, vindo a dar corpo à *Associação Canguru sem Fronteiras*, patrocinada pelo Conselho da Europa. Atualmente, o Canguru decorre num grande número de países, incluindo Portugal, sendo a prova deste concurso realizada no mesmo dia em todas as escolas do mundo que queiram aderir. Ao longo de quase duas décadas, os organizadores referem que o Canguru Matemático é o jogo-concurso preferido dos alunos e professores franceses. Entre os objetivos deste concurso, encontram-se: estimular o gosto pela matemática e a dedicação dos alunos a esta área do saber; mostrar o lado lúdico da matemática e proporcionar o prazer da resolução de problemas; atrair alunos para a matemática e aumentar os níveis de participação de jovens em todo o mundo; e permitir aos melhores alunos perceberem do que são capazes e compararem-se com os outros. O Canguru Matemático tira partido da *Internet* e produz anualmente um conjunto de brochuras com problemas, questões, puzzles, enigmas e desafios.

Estas competições de resolução de problemas matemáticos têm em comum o desenvolvimento da criatividade, indo para além do currículo normal, através de oportunidades desafiantes e de experimentação da Matemática fora da escola (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004). São marcantes devido ao efeito que têm sobre as atitudes dos alunos em relação à Matemática e às suas capacidades de resolução de problemas, desencadeadas por fatores competitivos e desafiantes, com reflexos significativos a nível educacional (Koichu & Andzans, 2009). Portanto, são ambientes profícuos para aprofundar a relação dos alunos com diversos conteúdos de Matemática, através de atividades que não obedecem à rigidez dos currículos e a formas padronizadas de tratamento dos tópicos matemáticos (Koichu & Andzans, 2009; Freiman, 2009). Procuram, por isso, contribuir para a aprendizagem e o desenvolvimento intelectual dos alunos, bem como melhorar os seus hábitos intelectuais de raciocínio, de construção de significados e capacidades de comunicação (Freiman, 2009).

O caráter desafiante das competições matemáticas é um fator acrescido de interesse para os participantes que começam a olhar os problemas de novas maneiras e a reconhecer as ideias que vale a pena perseguir (Taylor, 2009; Sternberg, 2008).

Em muitos casos, as competições matemáticas disponibilizam tempo suficiente para a ideação criativa, incubação e produção, fomentando o rigor intelectual e o pensamento de ordem superior, ao invés da trivialidade. E apostam na motivação intrínseca dos alunos para aprenderem mais (Lassig, 2012). Constituem, desta forma, espaços potenciadores da criatividade e do pensamento independente, onde os estudantes podem exibir o seu talento e, por vezes, resolver problemas de forma inesperada e inovadora (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004).

Nestes ambientes, os alunos aderem primeiro à Matemática e de seguida aprendem a apreciá-la através do pensamento e da compreensão de ideias úteis para resolver problemas (Baran, Erdogan, Çakmak, 2011). Para muitos alunos, o objetivo de vencer não é o que mais os move a participar, pois só o facto de se envolverem e serem selecionados já é uma motivação que afasta a desilusão de uma eventual derrota (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004).

2.5.1. Influência das competições de resolução de problemas na aprendizagem escolar

As competições matemáticas para além da sala de aula constituem um meio para melhorar a aprendizagem da Matemática (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004), particularmente quando organizadas em torno da resolução de problemas (Freiman & Applebaum, 2009). Desde que desafiantes, interessantes e divertidas, podem ser úteis para a aprendizagem de ideias matemáticas e, consequentemente, para o desenvolvimento do pensamento matemático (Losada, Yeap, Gjone & Pourkazemi, 2009).

A preparação dos alunos que está geralmente subjacente a este tipo de competições aumenta o seu conhecimento matemático de forma significativa (Kenderov, 2006). Constituem, pois, modelos dinâmicos de funcionamento que desafiam as salas de aula tradicionais, permitindo que os alunos organizem e regulem a sua própria aprendizagem, aprendam de forma independente ou socialmente, superem as dificuldades e se tornem conscientes dos seus próprios processos de raciocínio, estratégias e métodos (Freiman & Lirette-Pitre, 2008). São competições que enfatizam a conceção de que a matemática não se resume apenas a definições, teoremas, fórmulas, provas, etc., mas integra processos que incluem experimentar, raciocinar, conjeturar, refutar e fundamentar.

As atividades para além da sala de aula, de que é exemplo o Campeonato de Resolução de Problemas SUB12, destacam-se pelas oportunidades de realização do potencial individual, intelectual e criativo dos alunos e pelo importante papel que desempenham como complemento da educação matemática em sala de aula (Koichu & Andzans, 2009). Podem ser uma fonte útil de enriquecimento curricular porque enfatizam a atividade de resolução de problemas através da exploração de estruturas conceptuais, ao mesmo tempo que valorizam a Matemática enquanto disciplina (Freiman, 2009), fornecendo vastos recursos que podem ser discutidos e utilizados em sala de aula pelos professores com os seus alunos (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004). Trata-se de oportunidades, não só para desenvolver e aumentar as capacidades dos alunos de resolução de problemas, comunicação e raciocínio, como também para atrair os jovens para a Matemática (Freiman & Lirette-Pitre, 2008). São projetos que prestam um serviço importante à educação matemática e a um grande número de alunos promissores, com potencial talento matemático, constituindo um complemento natural ao trabalho realizado em sala de aula (Koichu & Andzans, 2009).

Nesta perspetiva, os contextos de enriquecimento matemático para além da sala de aula surgem como parceiros para a escola, ou seja, como promotores de uma aprendizagem paralela e complementar àquela que é intencionada pelo currículo escolar. Estender a resolução de problemas para lá da escola, procurando aproveitar, inclusivamente, as potencialidades das tecnologias digitais, pode ser interessante para o ensino da Matemática (Ponte, 2007).

O papel das iniciativas extracurriculares de resolução de problemas no desenvolvimento de conhecimentos e competências matemáticas ainda está por explorar profundamente, tal como a sua integração nas práticas curriculares. No entanto, parecem ter efeitos positivos sobre o desempenho dos alunos, tanto nas suas capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação, como no desenvolvimento da sua criatividade (Koichu & Andzans, 2009). Por exemplo, são contextos privilegiados para o desenvolvimento do raciocínio matemático, na medida em que promovem oportunidades para explicar e justificar processos e resoluções. Valorizam a comunicação matemática e outras dimensões da Matemática, para além dos cálculos, regras e procedimentos. Fornecem um *feedback* formativo que permite ajudar os alunos a melhorar as suas respostas, a completá-las ou corrigi-las, e a validá-las. A combinação de um problema desafiador com a possibilidade de obter *feedback* formativo acrescenta novas vias para orientar os alunos na diversidade das suas estratégias e resoluções (LeBlanc & Freiman, 2011).

Em suma, os ambientes de enriquecimento matemático, para além da sala de aula, contemplam recursos que podem influenciar a motivação e o potencial dos alunos, uma vez que geram oportunidades para a descoberta, exploração e comunicação e, ao mesmo tempo, promovem a participação e a aprendizagem (Freiman & Lirette-Pitre, 2008). Para Karkockiene (2005), um ambiente estimulante que induz novas ideias e valoriza a criação de soluções para problemas autênticos é propício ao desenvolvimento da criatividade.

2.6. Formas de representação e a aprendizagem matemática

As representações são signos que obedecem a regras para descrever processos, não só com o intuito de comunicar qualquer representação mental, mas também para a construção de conhecimento novo (Duval, 2006). No caso da Matemática, a atividade de resolução de problemas requer diferentes sistemas semióticos de representação que podem e devem ser usados de acordo com a situação a ser resolvida. Dependendo da situação, a facilidade de representação está relacionada com a escolha de um sistema semiótico adequado ou de vários sistemas em simultâneo. Duval (2006) dá como exemplo a geometria, na qual estão implícitos pelo menos dois sistemas de representação diferentes, um para a expressão verbal de propriedades ou para a expressão numérica de medidas e outro para a visualização. Para este autor, a relação entre o conteúdo e o objeto depende do sistema semiótico mobilizado para a produção de representações. Portanto, a eficácia em Matemática é altamente dependente da capacidade de representação.

Representar envolve os processos e os produtos que ocorrem internamente, na mente dos indivíduos, e a forma como estes se representam externamente (Ponte & Serrazina, 2000).

As representações externas referem-se ao ato de exteriorizar representações mentais internas. As representações internas são esquemas mentais construídos pelos indivíduos a fim de conceptualizar, explicar e compreender uma determinada realidade (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008). São ferramentas teóricas para caraterizar as cognições complexas que os alunos podem construir mediante o uso de representações externas e, embora não sejam diretamente alcançáveis, podem ser inferidas a partir do comportamento observável (Godino & Font, 2010). Já as representações externas são manifestações concretas, através de símbolos, tabelas, formas e diagramas, que visam representar uma realidade específica, como por exemplo a Matemática (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008).

A interação entre as representações externas e internas é considerada fundamental no processo de ensino e a aprendizagem da Matemática. A principal preocupação do processo de ensino centra-se na natureza das representações internas desenvolvidas pelos alunos e na sua tradução externa, de modo a desvendar os esquemas mentais que as suportam. As ligações entre as representações (internas e externas) podem basear-se na utilização de analogias, imagens e metáforas, bem como nas semelhanças e diferenças estruturais entre os sistemas de representação. As representações internas são sempre inferidas a partir da sua interação com a construção de representações externas. É útil considerar que as representações externas representam as internas e vice-versa (Godino & Font, 2010).

No domínio da Matemática, as representações podem ser pensadas como abstrações de ideias matemáticas ou esquemas cognitivos desenvolvidos pelos alunos através da sua atividade matemática, nas quais os números, expressões algébricas, gráficos, tabelas, diagramas, etc., são manifestações externas de conceitos matemáticos abstratos, que ajudam a entender esses mesmos conceitos (Pape & Tchoshanov, 2001). Portanto, as representações são expressões e construções externas que revelam as representações internas associadas ao conhecimento matemático dos alunos (Huang & Cai, 2007). Sendo assim, o desenvolvimento do pensamento representacional dos alunos é um processo dinâmico de interação entre a internalização de representações externas e a externalização de imagens mentais. Há uma influência mútua entre as duas formas de representação: a natureza de uma representação externa influencia a natureza da uma interna, e vice-versa (Pape & Tchoshanov, 2001).

A utilização das representações é determinada pela possibilidade de processamento matemático que estas permitem (Duval, 2006). Não são produtos estáticos, refletem o processo de raciocínio e o conhecimento utilizado pelos alunos na construção de uma relação ou de um conceito matemático (Steele, 2008). Funcionam como estímulos para ajudar a compreender os conceitos e, ao mesmo tempo, permitem a sua interpretação, comunicação e discussão (Tripathi, 2008). Referem-se sempre a alguma entidade, ideia, objeto, situação ou relação matemática (Ponte & e Velez, 20011; Ponte & Serrazina, 2000). São definidas como uma configuração de sinais, caracteres, imagens, objetos concretos, etc., que podem simbolizar ou representar algo (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008; Godino & Font, 2010), onde cada categoria se carateriza pelas suas próprias regras de uso e relacionamento (Marshall, Superfine & Canty, 2010).

É importante ter-se em conta que uma representação matemática pode variar de acordo com o contexto ou com o uso, pois a sua relação com o objeto representado não é unívoca (Ponte & Velez, 2011). Um gráfico cartesiano, por exemplo, pode representar uma função ou o conjunto solução de uma equação algébrica (Godino & Font, 2010). A representação da fração 1/4 pode ser feita através de um diagrama no qual um círculo/quadrado é dividido em quatro partes, das quais uma está sombreada (Sajadi, Amiripour & Rostamy-Malkhalifeh, 2013) e essa representação pode assumir vários significados, de acordo com a realidade retratada (uma pizza dividida em quatro fatias iguais; uma barra de chocolate dividida em quatro partes iguais...). Por isso, uma representação matemática não pode ser interpretada isoladamente, só faz sentido quando enquadrada num contexto bem determinado, à luz de um sistema de representação, com regras e significados bem definidos. Só esse enquadramento torna possível a comunicação matemática assente na utilização de representações comummente aceites e generalizadas (Ponte & Velez, 2011). Portanto, as representações constituem-se por meio de signos que são ligados a um significado e podem assumir diferentes formas, tais como, icónicas, simbólicas e verbais, entre outras (Saraiva, 2008; Ponte e Serrazina, 2000; Matos e Serrazina, 1996; Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

"As representações simbólicas consistem na tradução da experiência em termos de linguagem simbólica" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 71). Os símbolos são usados para designar conceitos, obedecendo a um conjunto de regras e convenções (p. ex. prioridade das operações nas expressões numéricas) e esquemas de organização (p. ex. procedimentos envolvidos na execução dos algoritmos) (Ponte & Serrazina, 2000). Os sistemas externos de representações matemáticas compreendem os sistemas de símbolos convencionais, como a numeração de base dez, notação algébrica formal, representação de coordenadas cartesianas, uso de sinais operatórios, etc. (Godino & Font, 2010).

Os símbolos são especialmente úteis para a resolução de problemas, uma vez que permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada (Ponte, Branco & Matos, 2008). Além disso, os símbolos ou sistemas de símbolos ajudam os alunos a resolver problemas e a fornecer explicações, previsões ou justificações (Pape & Tchoshanov, 2001). Normalmente, os símbolos são usados com o objetivo de facilitar a comunicação sobre os conceitos matemáticos (Matos & Serrazina, 1996). A literacia matemática requer o uso de linguagem e operações simbólicas, formais e técnicas. Os símbolos, as regras e os sistemas utilizados variam de acordo com o conhecimento matemático necessário para resolver uma tarefa específica (OCDE, 2013).

"As representações icónicas baseiam-se na organização visual, no uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 71). Na educação matemática, as representações visuais desempenham um papel importante, tanto para apoiar a reflexão como para comunicar ideias matemáticas (Ponte & Serrazina, 2000). Muitos investigadores consideram as representações visuais como um sistema cognitivo fundamental para a aprendizagem matemática, nomeadamente, para apoiar a resolução de problemas em todas as fases do processo (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008). Facilitam a concentração dos alunos na estrutura concreta e visual dos problemas (Steele, 2008), desempenhando, por isso, um papel importante no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas (Tripathi, 2008). A exploração de desenhos na resolução de problemas pode ajudar a reconhecer e a dar sentido às ideias dos alunos, permitindo valorizar e perceber os seus processos de resolução e não apenas os produtos finais (Saundry & Nicol, 2006). Uma imagem ou, mais especificamente, uma representação gráfica, tal como um diagrama, tabela ou gráfico de barras, pode conter muita informação sobre aquilo que o aluno entende e o que consegue fazer em Matemática (Scheuermann & Garderen, 2008). Estas formas de representação tendem a tornar a informação mais explícita e organizada, permitindo uma leitura mais fácil dos dados implícitos num problema e, ao mesmo tempo, destacar padrões e regularidades, direcionando a atenção dos indivíduos para alternativas inexploradas (Ainsworth, 1999). Este tipo de representações tem um papel muito importante na manifestação de ideias matemáticas, uma vez que ajudam a reconhecer relações que nem sempre são visíveis por meio da representação verbal e escrita.

Podem, por isso, ser uma poderosa ferramenta de aprendizagem, principalmente quando servem para tornar evidentes aspetos de um problema que são frequentemente assumidos (Clements, 2004), ajudando os alunos, principalmente os mais criativos, a visualizar situações abstratas (Starko, 2009). A elaboração de desenhos, de forma detalhada, mesmo para o mais simples dos problemas, funciona como suporte icónico de processos de pensamento para gerar ideias, processos e conceitos matemáticos (Saundry & Nicol, 2006). Portanto, é importante valorizar e apoiar o pensamento e a representação visual; não fazê-lo significa limitar oportunidades de pensamento criativo em Matemática, o que implica igualmente limitações à compreensão matemática (Worthington, 2005).

A linguagem matemática não é um meio exclusivo para a comunicação de ideias matemáticas; a linguagem natural também é usada para esse efeito (Ponte & Serrazina, 2000). Os sistemas de representação verbal referem-se ao uso de linguagem natural, vocabulário matemático e não matemático, bem como de gramática e sintaxe (Goldin & Shteingold, 1998). Ilustram a articulação entre o mundo real e o mundo matemático e podem ser usados ora como um modo de processamento mental ora como um meio para representar externamente conceitos (Aspinwall, Haciomeroglu & Presmeg, 2008). São, portanto, fundamentais para a compreensão e constituem um suporte cognitivo para a externalização de pensamentos/raciocínios matemáticos por via de palavras (Pape & Tchoshanov, 2001), resultantes do entendimento, descrição, análise, explicação ou reflexão, sobre, por exemplo, representações numéricas, algébricas ou gráficas (Zhe, 2012). A invocação de representações verbais é, por isso, fundamental para apoiar a compreensão matemática visual e analítica, substituindo, em muitos casos, as imagens visuais ou as expressões simbólicas matemáticas (Aspinwall, Haciomeroglu e Presmeg, 2008). Assim, "... é importante perceber que os alunos só podem desenvolver a sua competência no uso da linguagem matemática a partir da linguagem natural (Ponte & Serrazina, 2000, p. 62).

Geralmente, as representações verbais são usadas para lançar problemas de Matemática e, ao mesmo tempo, constituem um meio natural para a sua compreensão e contextualização (Friedlander & Tabach, 2001). Além disso, são determinantes para apoiar a explicação de estratégias e processos de raciocínio utilizados, complementarmente a outros modos de representação (Cañadas, Castro & Castro, 2008; Preston e Garner, 2003; Friedlander & Tabach, 2001). Podem ainda servir como base conceptual para a aprendizagem de estruturas simbólicas formais e generalizáveis, dado que a verbalização de passos, usando desenhos ou outras representações concretas, também pode ajudar na conexão com os símbolos matemáticos (Aspinwall, Haciomeroglu & Presmeg, 2008). Por tudo isto, no processo de resolução de um problema, é geralmente difícil isolar as representações, porque na maioria dos casos, qualquer abordagem é acompanhada pela combinação de explicações verbais com cálculos numéricos (Friedlander & Tabach, 2001), associados, muitas vezes, a representações visuais para tornar claros aspetos abstratos implicados na resolução. Além disso, a expressão do pensamento por palavras, combinada com diferentes representações complementares, enriquece a compreensão das ligações efetuadas (Aspinwall, Haciomeroglu & Presmeg, 2008). O uso exclusivo da comunicação verbal pode ser uma ferramenta matemática frágil quando comparada com abordagens mais formais, uma vez que o seu uso isolado pode provocar associações irrelevantes ou enganosas, por ser menos universal e depender do estilo pessoal (Friedlander & Tabach, 2001).

As representações e a capacidade de as usar adequadamente fazem parte integrante da aprendizagem da Matemática (Scheuermann & Garderen, 2008) e devem ser pensadas como ferramentas para a atividade cognitiva, em vez de produtos ou do resultado final de uma tarefa (Pape & Tchoshanov, 2001). São um importante veículo para a aprendizagem e para a agilização da comunicação matemática, constituindo ferramentas vitais para registar, analisar, resolver e comunicar ideias matemáticas (Preston & Garner, 2003). Quando utilizadas de forma flexível, como ferramentas de compreensão e comunicação de conceitos matemáticos, potenciam a aprendizagem, tornando-a mais significativa e eficaz. Por exemplo, os modelos representacionais, como gráficos e esquemas ou outras representações pictóricas, podem ser usados para ajudar os alunos a explicar ou justificar argumentos e resultados. Neste sentido, quando as representações são usadas como ferramentas para a compreensão e comunicação, são construídas e adaptadas de acordo com o assunto em causa (Pape & Tchoshanov, 2001).

Ajudar a pensar e a compreender são duas grandes funções que as representações podem desempenhar na aprendizagem da Matemática e no raciocínio matemático (Ponte & Velez, 2011) e constituem um meio ímpar para promover a compreensão (Berthold & Renkl, 2005). Conhecer e lidar com representações e ser capaz de representar constitui uma competência que amplia a capacidade de pensar matematicamente (NCTM, 2007; Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008; Ponte e Serrazina, 2000; Clements, 2004). Um indicador importante de compreensão é ser capaz de representar situações matemáticas de formas diferentes e saber como diferentes representações podem ser úteis para fins diferentes (Harries, Lopez, Reid, Barmby & Suggate, 2008). Para encontrar o melhor caminho numa questão matemática, é importante perceber como as diversas representações se conectam umas com as outras e como elas são semelhantes ou diferentes. O grau de compreensão conceptual dos alunos está relacionado com a riqueza e a extensão das ligações que fazem. Por exemplo, quando os alunos adicionam quantidades fracionárias de denominadores diferentes, como 1/3 + 2/5, podem desenhar uma imagem ou usar materiais manipuláveis de vários tipos para operacionalizar o cálculo. Além disso, também podem representar a adição 1/3 + 2/5 =? associada a uma história. Ou ainda, podem voltar-se para a reta numérica, representando cada fração através de um segmento e adicionando as frações, juntando os respetivos segmentos. Ao transformarem as frações para que elas tenham o mesmo denominador, os alunos podem chegar a uma medida comum para as mesmas, determinar a soma, e ver sua magnitude na reta numérica. Ao operarem com diferentes formas de representação, os alunos analisam as semelhanças e diferenças entre as representações, as vantagens de cada uma, e como estas devem ser traduzidas para que possam produzir a mesma resposta, tornando as conversões úteis quando realizadas de forma apropriada (NRC, 2001).

As representações devem ser tratadas como elementos essenciais de apoio à compreensão dos conceitos, ideias e relações matemáticas, à comunicação de estratégias, argumentos e conhecimentos matemáticos, e à aplicação da Matemática a problemas realistas (NCTM, 2007). A maioria dos educadores matemáticos e investigadores concordam que a chave para a compreensão, comunicação e operacionalização de conceitos matemáticos está ligada às formas de representação, entre as quais, se distinguem as gráficas, tabulares, simbólicas e verbais (Sajadi, Amiripour & Rostamy-Malkhalifeh, 2013).

2.6.1. Flexibilidade representacional e criatividade matemática

O papel das múltiplas representações na aprendizagem e compreensão de ideias ou conteúdos é uma questão central do ensino da Matemática sobre a qual tem havido um interesse crescente por parte da investigação. O argumento a favor do uso de vários tipos de representações é baseado em estudos que mostram que a aprendizagem é facilitada quando a informação está disponível em mais do que um formato. De acordo com a investigação, o uso de múltiplas representações reforça a compreensão de conceitos, melhora a capacidade de resolução de problemas e fortalece o processo de aprendizagem (Erbilgin & Fernández, 2004). A organização e manipulação de informação através de múltiplas representações pode permitir que os alunos compreendam os processos complexos mais profundamente e facilitar a transferência de conhecimento porque cada representação fornece uma visão única e diferente (O'Keefe, Letourneau, Homer, Schwartz & Plass, 2014).

A flexibilidade é uma caraterística das pessoas criativas e está em sintonia com as mudanças aparentes nas abordagens adotadas para gerar uma resposta. A flexibilidade carateriza-se por ter à disposição uma variedade de opções e perspetivas antes de escolher uma (Starko, 2009). No caso das representações, a flexibilidade possibilita aos alunos considerarem diferentes sistemas alternativos, no sentido de escolherem os que julgam mais adequados para representar ideias ou produtos das suas investigações e explorações matemáticas.

Traduzir ideias por meio de representações e mover-se de forma flexível entre as representações é um aspeto fundamental da compreensão matemática dos alunos. As conexões e conversões entre representações tornam a Matemática significativa e pode ajudar a encarar os assuntos como uma teia de ideias ligadas, ao contrário de um conjunto arbitrário de regras e procedimentos desconectados (Marshall, Superfine & Canty, 2010). O aspeto mais importante da diversidade de representações para o mesmo objeto matemático refere-se à conversão de um modo de representação para outro. Em Matemática, qualquer construção é apenas acessível através das representações semióticas e, em geral, uma única representação semiótica dificilmente pode levar à compreensão do objeto matemático que representa. Tendo em conta que uma representação não pode descrever completamente uma construção matemática e que cada representação tem vantagens diferentes, usar várias representações para a mesma situação está no cerne da compreensão matemática (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008).

O domínio e a compreensão de um conceito dependem da capacidade de o identificar em vários sistemas de representação, da capacidade de o manipular de forma flexível dentro dos sistemas particulares de representação e da capacidade de o traduzir de um sistema de representação para outro com precisão (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Menelaou, Gagatsis & Sergiou, 2008; Shiakalli & Gagatsis, 2006).

As representações matemáticas não podem ser compreendidas isoladamente; por exemplo, uma equação ou uma fórmula específica ou um gráfico no sistema cartesiano só adquirem significado como parte de um sistema mais amplo de significados e convenções estabelecidas. Cada sistema de representação inclui, portanto, as convenções que o configuram, bem como as relações com outros objetos e sistemas matemáticos. Para interpretar o numeral 12 é necessário incorporar as regras do sistema posicional bem como do sistema de números reais (Godino & Font, 2010). Uma representação visual pode incluir gráficos de informação (gráfico de linhas, gráfico de barras, quadro de valores, diagrama de extremos e quartis), que diversamente transmitem informação quantitativa, ordinal, nominal e relacional, revelando sistemas de representação distintos, que importa reconhecer e relacionar (Diezmann, 2009).

Regra geral, a atividade matemática requer, simultaneamente, a mobilização de mais do que um registo de representação ou a possibilidade de mudar de registo representacional a qualquer momento, de acordo com a conveniência (Duval, 2006).

Os alunos devem compreender que as representações são ferramentas para modelar e interpretar fenômenos matemáticos, que representam aspetos de uma dada situação em termos matemáticos (NCTM, 2007). Assim, devem ser capazes de usar representações dadas e de selecionar, entre várias representações, as que são mais úteis para uma situação específica. É também desejável que sejam capazes de criar as suas próprias representações, uma vez que as suas representações originais traduzem uma melhor compreensão das ideias matemáticas (Berthold & Renkl, 2005; Preston & Garner, 2003; Ponte & Serrazina, 2000).

O desenvolvimento da fluência representacional dos alunos, para além de requerer o uso e combinação de múltiplas representações, também apela à interação entre as representações internas e externas para conferir significado concreto às ideias abstratas. É através da exteriorização das ideias abstratas que os alunos começam a negociar os significados dos conceitos e a refinar as suas representações (Pape & Tchoshanov, 2001). Por outro lado, dado que as representações permitem reconhecer e detetar os modos de interpretação e de raciocínio utilizados pelos alunos, podem ser usadas para provocar a discussão de ideias matemáticas (Clements, 2004).

Vários modelos teóricos (Sparrow, 1989; Vessey, 1991; Gilmore & Green, 1984; Wickens & Andre, 1990; Meyer, 2000) definem a flexibilidade de representação como a capacidade de selecionar representações de acordo com as caraterísticas das tarefas propostas. Estes modelos defendem que os alunos mais capazes de identificar as exigências das tarefas e de selecionar as representações mais adequadas têm melhor desempenho do que aqueles que não são sensíveis a estas caraterísticas. Quando os alunos são pensadores flexíveis desenvolvem representações muito ricas (Steele, 2008) e à medida que refletem sobre as suas ações, as suas formas de representar podem evoluir para versões cada vez mais sofisticadas (Warner, Schorr & Davis, 2009). Portanto, incentivar os alunos a refletir ativamente sobre a adequação de representações específicas para situações particulares, bem como comparar as vantagens e desvantagens de diferentes tipos de representações, é um meio para o desenvolvimento da flexibilidade de representação (Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009).

Muitas vezes, os alunos têm experiências e conhecimentos diferentes e, consequentemente, domínios distintos das diferentes representações. Esta heterogeneidade, quando partilhada, pode ser benéfica para dotar os alunos de uma maior variedade de representações alternativas (Ainsworth, 1999).

A flexibilidade de representação determina, em grande medida, a capacidade que os alunos possuem para lidar com situações novas, constituindo uma aptidão determinante na atividade de resolução de problemas. Portanto, o recurso a múltiplas representações deve ser incentivado através de abordagens promotoras da integração, compreensão e conexão das representações utilizadas, evitando exemplos espartilhados, diretivos e redutores da aprendizagem matemática (Berthold & Renkl, 2005).

2.6.2. Flexibilidade representacional na resolução de problemas

A resolução de problemas é o tipo de tarefa matemática em que os processos e estratégias envolvidos são revelados através das representações (Sajadi, Amiripour & Rostamy-Malkhalifeh, 2013). Stylianou (2008) identificou quatro papéis das representações na resolução de problemas, revelados em trabalhos teóricos ou empíricos sobre o tema:

(1) *ferramentas de compreensão da informação* – as representações são utilizadas como uma ferramenta para combinar diferentes aspetos do problema e ver como estes interagem. Este papel é muito importante, na medida em que nem todos os aspetos de um problema são imediatamente óbvios para quem o resolve;

(2) *ferramenta de registo* – as representações são utilizadas como ferramentas para registar todas as informações fornecidas, evitando que elas tenham de ficar armazenadas na mente, ou seja, são instrumentos eficientes e compactos para gravar os pensamentos em meios externos;

(3) *ferramentas facilitadoras da exploração de conceitos* – as representações são dispositivos flexíveis que permitem manipular conceitos e revelar informações e suas implicações;

(4) *ferramentas de monitorização e avaliação* – as representações são usadas para acompanhar os progressos feitos e tomar decisões durante a resolução de problemas.

Stylianou (2008) resume ainda as funções das representações, como *suporte para apoiar os alunos* na resolução de problemas, em dois níveis:

(1) *cognição individual* – neste nível, as representações são utilizadas pelos alunos para compreender e organizar a informação, nas etapas iniciais da resolução de problemas; como ferramentas cognitivas para reduzir a carga cognitiva, ao longo da resolução dos problemas; para facilitar a exploração dos dados, promovendo a manipulação durante a fase de análise e exploração; e como dispositivos de controlo, no sentido de detetar abordagens erradas, durante os momentos de monitorização;

(2) *prática social* – neste nível, as representações são utilizadas pelos alunos como objetos de retórica, quando chegam a um impasse em que as perspetivas não são óbvias; e como dispositivo que permite partilhar estratégias e negociar novas ideias e, ao mesmo tempo, alargar o reportório de resolução do problema.

Para este autor, a utilização das representações depende, em particular, da finalidade da representação, de acordo com o contexto e as necessidades de quem a usa. Defende, ainda, que não é possível eleger uma forma específica de representação como ideal para servir um propósito. Por exemplo, tanto uma representação visual como uma representação simbólica podem servir para a exploração de um determinado problema, no entanto, uma pode ser mais vantajosa do que a outra. Portanto, é preciso ter a consciência da finalidade com que cada representação é utilizada num determinado momento. Na resolução de problemas, reconhece-se a existência de diferentes caminhos para chegar à solução, o que permite refletir naturalmente, e de maneira profunda, sobre as diversas maneiras de representar e explorar ideias matemáticas envolvidas num problema (Trigo, 2008).

O uso de determinados modos de representação, por exemplo, visuais ou simbólicos, leva à melhoria de habilidades matemáticas, bem como ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e de raciocínio dos alunos (Pape & Tchoshanov, 2001).

Os alunos que são capazes de recorrer a uma variedade de representações, com vários sentidos complementares, como por exemplo, desenhos, diagramas, equações e descrições verbais, são mais propensos a resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009). Além disso, o uso de múltiplas representações facilita o desenvolvimento de conceitos matemáticos e as ações necessárias para a resolução de um problema (Pape & Tchoshanov, 2001). Já os alunos que aprendem apenas através de símbolos matemáticos, sem os relacionar com outro tipo de representações, podem tornar-se competentes a nível processual mas revelar-se incapazes de usar o conhecimento noutros sistemas de representação (Steele, 2008). Portanto, a flexibilidade de representação é uma caraterística dos alunos que fazem escolhas adequadas, tendo em conta a resolução das tarefas em mão (Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009).

As representações são centrais na atividade de resolução de problemas e a sua construção, de acordo com o conhecimento matemático dos alunos, é um processo crucial (Stylianou, 2008). A competência representacional depende do conhecimento que não é apenas armazenado mas mentalmente representado e organizado (ligado e estruturado) de maneira a facilitar a sua recuperação e aplicação (NRC, 2001). Uma das funções do recurso a múltiplas representações é apoiar o processo de construção de conhecimento profundo quando os alunos integram informações em representações e constroem modelos mentais (O'Keefe, Letourneau, Homer, Schwartz & Plass, 2014). Normalmente, os alunos usam o conhecimento prévio para dar sentido a todas as formas de representação, sendo que as representações iniciais e a sua evolução dependem da finalidade a que se destina cada forma de representação (Pape & Tchoshanov, 2001).

O conhecimento anterior, conjugado com a liberdade para pensar profundamente e construir representações, permite que os alunos testem e explorem com mais detalhe as suas próprias representações e estabeleçam conexões significativas, de modo a que os problemas façam sentido para si (Benko & Carolyn, 2006). Dar espaço para que os alunos possam construir as suas representações tem benefícios para o desenvolvimento de métodos próprios de resolução e fornece um ponto de partida para a busca de representações alternativas (NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). O recurso a múltiplas representações em contextos de aprendizagem pode melhorar a capacidade de decisão sobre as representações mais adequadas para resolver um problema (Ainsworth, 1999). Portanto, a utilização de múltiplas representações promove o sucesso na resolução de problemas (Gagatsis & Shiakalli, 2004). E a compreensão está relacionada com sistemas de representação flexíveis que permitem aos alunos enfrentar com êxito novos problemas, não só utilizando o seu conhecimento prévio, mas também a organização representacional prévia do conhecimento (Warner, Schorr & Davis, 2009).

O recurso a diferentes representações na resolução de problemas estimula a flexibilidade e, ao mesmo tempo, aumenta a consciência dos alunos sobre o seu estilo de resolução (Friedlander & Tabach, 2001). No entanto, a escolha de representações depende da natureza do problema, do tipo de questões, do modo como o indivíduo planeia todo o processo e das tentativas de uso de uma ou outra representação ou de várias ao mesmo tempo, sugerindo-se que os problemas a propor aos alunos legitimem e até exijam o uso de mais do que uma representação (Friedlander & Tabach, 2001). Neste processo, o estilo de pensamento é particularmente importante para a criatividade, ou seja, a liberdade de pensamento é essencial para se adotar novas formas de representação para resolver problemas (Sternberg, 2007).

A facilidade de utilização de múltiplas representações e a flexibilidade para alternar entre diversas representações é parte de uma *variabilidade cognitiva*, que permite resolver problemas com maior rapidez e precisão (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Para além disso, a flexibilidade de representação é uma caraterística do pensamento criativo com clara relevância na resolução de problemas matemáticos e que consiste na capacidade de superar a rigidez de modelos pré-estabelecidos (Haylock, 1997). Por sua vez, o pensamento criativo é típico dos alunos que preferem representar soluções de formas originais e significativas (Aizikovitsh-Udi, 2013).

Aprender a construir e interpretar representações envolve aprender a participar em práticas complexas de comunicação onde diversas representações são usadas (Pape & Tchoshanov, 2001). Cada forma de representação exprime elementos do raciocínio utilizado, da estratégia escolhida e da sua comunicação (Preston & Garner, 2003). Ao mesmo tempo, cada representação proporciona aos alunos um ponto de vista através do qual eles se podem aproximar da solução de um problema. A atividade de resolução de problemas dificilmente será bem-sucedida sem uma representação nitidamente adequada, que indique se um aluno percebeu o problema e se tem um plano de resolução bem orientado. Os alunos que têm dificuldade em representar problemas matemáticos têm, normalmente, mais dificuldade em resolvê-los (Sajadi, Amiripour & Rostamy-Malkhalifeh, 2013).

A diversidade de respostas que se configuram por meio de diferentes representações revela que os alunos pensam de modo muito diversificado, tomando decisões também elas muito diversas. Quando os alunos têm a oportunidade de escolher os seus próprios modos de representação, torna-se fácil aceder às suas ideias matemáticas, à sua compreensão dos conceitos, aos processos de aprendizagem e à natureza das suas possíveis dificuldades (Cerqueira & Vale, 2013). A evolução das representações individuais dos alunos é muito influenciada e estimulada pelas interações que estabelecem com o meio e com os outros intervenientes, aquando do seu envolvimento na execução de tarefas. As interações motivam a explicação de aspetos particulares de representações, que podem levar os alunos a descobrir maneiras de modificar as suas formas de representação e de expressão (Warner, Schorr & Davis, 2009).

Os ambientes que possibilitam o uso de múltiplas representações e promovem esse uso de forma flexível são ambientes em que os alunos melhor compreendam noções matemáticas e mais desenvolvam a predisposição para a resolução de problemas (Heinze, Star & Verschaffel, 2009). Os contextos que dão espaço aos alunos para manifestarem as suas habilidades representacionais permitem-lhes reconhecer os pontos fracos e fortes das suas representações, contribuindo fundamentalmente para o desenvolvimento do seu pensamento matemático (Berthold & Renkl, 2005).

2.7. Os professores e a educação matemática criativa

Partindo do princípio de que a criatividade, como um potencial, existe em cada indivíduo, então esta deve ser fomentada em todos os aspetos da aprendizagem como parte integrante do processo educativo dos alunos (Yee, 2008). Sendo assim, a promoção da criatividade em todos os alunos deveria ser vista como uma meta importante do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, através de oportunidades para desenvolver ao máximo as potencialidades criativas de cada um. Para tal, é importante um ensino inovador que possibilite aos alunos experimentar o imprevisível e o incerto, por via de experiências que produzam surpresa e novidade. Um currículo criativo oferece aos alunos muitas oportunidades para o comportamento criativo, com reflexos na aprendizagem individual ou coletiva, manifestada, muitas vezes, através de produtos originais (Irish National Teachers' Organisation, 2009).

A criatividade é uma capacidade transversal a todas as áreas de conhecimento e a escola não tem cumprido o seu papel no seu desenvolvimento porque formata, muitas vezes, as reações e respostas dos alunos, limitando em grande medida a sua liberdade. A autonomia e o pensamento criativo devem ser trabalhados na escola, em todos os níveis de escolaridade, uma vez que esse tipo de pensamento é acessível a todos os alunos. A liberdade de ação, muitas vezes restringida pela escola, não significa que os alunos se envolvam no processo de aprendizagem sem a orientação do professor, mas antes que lhes é permitida a construção pessoal do conhecimento. Tal independência envolve que os professores ajudem os alunos a incorporar novos conhecimentos nas suas estruturas de conhecimento prévio, bem como a desenvolver a metacognição necessária para darem sentido pessoal a como e quando usar o que aprenderam (Beghetto & Plucker, 2006). É possível cumprir este objetivo, incentivando os alunos a pensar de formas diferentes, por meio de tarefas abertas, pouco estruturadas, que suscitem múltiplas soluções e diferentes caminhos para chegar às soluções, de modo a realçarem o pensamento imaginativo e original.

É necessário que os professores possuam conhecimento, experiência, capacidades e ferramentas didáticas para se envolverem pessoalmente na valorização das ideias dos alunos e para encorajar a produção de soluções únicas (Vale & Pimentel, 2013). É amplamente reconhecido que os professores desempenham um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem não só pelo que sabem, mas também pela maneira como usam o conhecimento e, como tal, aquilo que pensam, sabem e fazem com os seus alunos pode fazer a diferença nas suas práticas de ensino (Vale, Barbosa & Fonseca, 2014). Portanto, os professores têm uma grande responsabilidade na forma como a Matemática é ensinada e aprendida e são a chave para promover o pensamento criativo nesta disciplina. Qualquer esforço para promover a criatividade dos alunos depende substancialmente dos professores (Kattou, Kontoyianni & Christou, 2008). Os professores são o principal veículo para o desenvolvimento da criatividade, porque têm o poder de libertar o potencial criativo, inovador e crítico dos estudantes (Vale, Barbosa & Fonseca, 2014). Logo, é da responsabilidade dos professores encontrar metodologias e tarefas que se coadunem com uma educação criativa e inovadora da nova geração de alunos.

Os professores que prestam atenção à forma como os alunos utilizam as suas mentes estão numa posição privilegiada para observar e incentivar a capacidade criativa, bem como o conhecimento contido nas propostas interessantes dos alunos perante questões que lhes são colocadas (Ward, 2007). O seu papel é determinante para o desenvolvimento de habilidades criativas dos alunos, além de que são os principais responsáveis por alterar a forma como a Matemática é ensinada e aprendida, em contexto escolar e para além da sala de aula (Yee, 2008). Acresce que incentivar a criatividade é igualmente importante para o desenvolvimento da compreensão matemática e, por isso, os professores não devem limitar o ensino ao uso de procedimentos e à rapidez e precisão, nomeadamente, na resolução de problemas, mas tentar também proporcionar um ambiente seguro onde os alunos possam ir além do conhecimento que dominam, com oportunidades para deixar o pensamento fluir (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012). Devem apoiar o pensamento criativo e o talento matemático dos seus alunos, através de formas também criativas de introdução dos conceitos matemáticos (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013). Nesse sentido, os professores devem estar abertos à diversidade e singularidade das crianças e trabalhar para desenvolver os seus talentos e explorar as suas aptidões num ambiente psicologicamente seguro e socioculturalmente enriquecido (Tan, 2007).

A educação exige professores bem preparados, capazes de motivar e apoiar os alunos no desenvolvimento do seu potencial criativo e no enriquecimento dos seus conhecimentos e experiências (Velikova, 2008). Mas, tal como noutros aspetos, as conceções dos professores de Matemática sobre a criatividade influenciam significativamente o modo como organizam e conduzem a atividade dos seus alunos em sala de aula, ou fora dela. O conhecimento dos professores é marcado pelas suas próprias perceções acerca de como os estudantes lidam com a Matemática e pela forma como esta pode gerar aprendizagens adequadas (Applebaum & Leikin, 2007). Sendo assim, a inovação curricular e a promoção da criatividade derivam, em grande medida, das conceções dos professores sobre o ensino da Matemática. Se as perceções dos professores acerca da criatividade forem imprecisas, o reconhecimento e o desenvolvimento do potencial criativo dos seus alunos mostra-se difícil de concretizar (Mann, 2005). Portanto, ajudar a desenvolver o potencial criativo dos alunos é, sem dúvida, um desafio e um dos objetivos claros para o desenvolvimento profissional dos professores na atualidade (Zazkis & Holton, 2009). Deste modo, é importante que os professores se apropriem do significado geral do conceito de criatividade e percebam que esta capacidade varia de acordo com o sujeito e o contexto no qual ela se manifesta (Haylock, 1997).

Programas de formação e desenvolvimento profissional de professores representam um contexto promissor para o cultivo de práticas pedagógicas e de conceções sustentadas numa visão interrelacionada de aprendizagem e criatividade (Beghetto & Plucker, 2006). Portanto, considera-se muito importante a formação adequada dos professores para que estes valorizem e promovam o desenvolvimento da criatividade nos alunos (Leikin, Berman & Koichu, 2009; Zazkis & Holton, 2009). É defendido, neste âmbito, um processo de desenvolvimento pessoal e profissional que contemple o trabalho sobre conceções e práticas dos professores bem como sobre questões de avaliação e análise do trabalho dos alunos, no sentido de promover a criatividade para todos (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009). Um dos focos desse trabalho coloca-se ao nível da preparação e implementação de ambientes educacionais que promovam a criatividade matemática, isto é, que ofereçam segurança aos alunos para se sentirem capazes de assumir riscos, cometer erros e interagir com os outros, partilhando as suas ideias e os seus pontos de vista (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012). Será aquilo a que se pode chamar uma atmosfera criativa, que permita liberdade de expressão, de pensamento e de trabalho, isenta de stresse, ansiedade e medo de sanções (Urban, 2007). Estes são os ambientes geradores de novas ideias, onde os alunos reconhecem que umas são melhores do que outras e ao mesmo tempo valorizam os aspetos criativos das ideias apresentadas (Sternberg, 2008).

Porém, a formação e o desenvolvimento profissional dos professores é um processo que envolve a mudança de hábitos, como por exemplo, o hábito de atribuir mais importância à precisão do que à originalidade (Hershkovitz, Peled & Litter, 2009). Os professores que reconhecem que a criatividade combina originalidade e adequação de procedimentos estão em melhor posição para integrar a criatividade dos alunos no currículo e na sala de aula, todos os dias (Beghetto & Kaufman, 2013).

2.7.1. Caraterísticas dos professores e dos ambientes criativos

Há alguma evidência, sustentada na investigação, de que certas caraterísticas dos professores, tais como, a atitude em relação à criatividade, as relações que estabelecem com os seus alunos e o uso de materiais pedagógicos ricos, estão correlacionadas com a intensidade com que a criatividade é estimulada nos alunos.

Para os professores que procuram incentivar a criatividade dos alunos, o mais importante não é o conteúdo matemático, em si mesmo, mas sim a prática de fazer Matemática (Kattou, Kontoyianni & Christou, 2008). Portanto, assumem a dupla responsabilidade de garantir que os alunos aprendem conteúdos de Matemática e, simultaneamente, que desenvolvem o seu potencial criativo (Beghetto, 2013b).

Os professores criativos valorizam e toleram pensamentos incomuns, ideias originais e produtos novos, dando ênfase aos esforços individuais para encontrar uma solução, e não apenas aos resultados finais, evidenciando que a personalidade dos alunos também é apreciada e levada a sério (Urban, 2007). São professores que revelam um estilo integrador do ensino, promovem a aprendizagem independente, motivam para o conhecimento como uma base sólida para o pensamento divergente, estimulam o pensamento flexível, valorizando as sugestões e questões emergentes, ajudam a lidar com o fracasso e a frustração e encorajam a experimentar o novo e o incomum (Cropley, 1997, referido por Beswick, 2008). Estes professores esforçam-se para dar aos alunos uma base de conhecimento geral, mas também de conhecimento em vários tópicos específicos, cultivam a imaginação ativa e a capacidade de recordar, descobrir ou inventar problemas, promovem a habilidade de ver e estabelecer conexões e associações, bem como discutem semelhanças e diferenças entre diferentes métodos. São também estes professores os que mais incentivam os alunos a pensar num problema de múltiplas maneiras, a ter vontade de avaliar o seu próprio trabalho e a comunicar os seus resultados (Cropley, 1997, referido por Beswick, 2008).

São professores que revelam conhecimento e experiência nos objetivos e intenções que perseguem. Por isso, trabalham a motivação, confiança, curiosidade, o interesse por explorar e a tomada de riscos, desenvolvem competências de autorregulação e metacognitivas, ensinam técnicas e estratégias para facilitar o desempenho criativo e constroem ambientes propícios para a criatividade (Tan, 2007). Portanto, os professores que promovem o desenvolvimento da criatividade dominam, geralmente, um reportório de estratégias para estimular novas ideias nos seus alunos ao lidarem com as tarefas de aprendizagem (Irish National Teachers' Organisation, 2009). Geralmente, são professores que se veem a si mesmos como criativos e ao seu ensino como um ato criativo e, desta forma, encontram-se numa melhor posição para modelar, incentivar e apoiar as ideias inovadoras dos seus alunos, bem com a tomada sensata de riscos, valorizando formas de expressão significativas (Beghetto e Kaufman, 2014).

Para aprenderem a pensar como matemáticos, os alunos devem ter oportunidades de experienciar os processos com quais os matemáticos atuam: pesquisar, explorar, conjeturar, examinar, refutar, adaptar estratégias, elaborar planos, concluir, justificar as suas conclusões e refletir sobre elas (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012).

Isto requer situações que ajudem a tornar a aprendizagem matemática mais interessante, eficaz e significativa. Trata-se de situações onde o papel do professor é essencial para incentivar a discussão de ideias, ora para verificar a evolução dos alunos ora para dar o *feedback* de que eles precisam (Pantziara & Philippou, 2007). Boas ideias, surgidas durante uma discussão, potenciam a criatividade e o raciocínio matemático, principalmente quando os alunos propõem respostas inesperadas ou ambíguas (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Consequentemente, a implementação de ambientes de aprendizagem com estas caraterísticas é vista como uma condição essencial para o desenvolvimento da criatividade matemática (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012).

Os professores que promovem ambientes criativos são usualmente apaixonados pelo que fazem, são confiantes, curiosos e ousados; estão abertos a novas experiências; trabalham com ideais e por prazer, adotando uma postura facilitadora e muitas vezes divergente da educação tradicional; criam ambientes sem pressões, estimulam a curiosidade e incentivam o questionamento; usam a crítica com cautela e procuram descobrir o potencial de cada aluno; dão oportunidades para trabalhar com uma diversidade de materiais e sob diferentes condições; consideram os interesses dos jovens e preveem oportunidades para a consciencialização do seu potencial criativo, encorajando a elaboração de produtos originais (Oliveira, 2010).

Sem prejuízo do que já foi dito, é necessário perceber que os ambientes de aprendizagem tanto podem nutrir como amortecer a criatividade dos alunos. De facto, o mesmo ambiente de aprendizagem pode inspirar uns alunos e limitar outros. Para contrariar esta realidade, os professores devem estar atentos às formas como os ambientes de aprendizagem são compreendidos diversamente por diferentes alunos. Portanto, nutrir a criatividade exige que os professores percebam como os diversos alunos apreciam os ambientes de aprendizagem.

2.7.2. A natureza das tarefas em ambientes criativos

As orientações curriculares recomendam que os professores promovam e incentivem uma diversidade de processos na busca de soluções às tarefas propostas, em vez da utilização de formas de resolução definidas à partida. Os alunos devem ser capazes de fazer as suas próprias explorações e pesquisas, cabendo ao professor fornecer os materiais apropriados e guiá-los na sua aprendizagem (Beghetto & Plucker, 2006).

Os professores mais competentes revelam-se pela sua capacidade de equilibrar a sequenciação das matérias com oportunidades de aprendizagem em que os alunos sejam estimulados a expressar ideias originais e pessoalmente significativas (o que é referenciado por alguns autores como a evidência de criatividade Mini-c) (Beghetto & Kaufman, 2007), ajudando-os a reconhecer de que modo essas ideias se harmonizam com o conhecimento matemático socialmente reconhecido (Beghetto, 2013b). Desta forma, os professores ajudam os alunos a desenvolver a sua confiança criativa ou a sua autoeficácia criativa, bem como a sua metacognição criativa (Beghetto, 2013b). Para tal, importa que privilegiem abordagens de ensino que reconheçam a voz e o potencial dos alunos, em vez de enfatizarem apenas os algoritmos, regras e procedimentos para resolver corretamente certo tipo de questões, sem considerar a essência da Matemática como ciência (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012).

A elaboração e planeamento das tarefas a apresentar aos alunos, tendo por base o currículo, é uma das grandes responsabilidades dos professores (Applebaum & Saul, 2009). Num ambiente em que os alunos constroem ativamente o seu conhecimento e compreensão, os professores funcionam como mediadores, apresentando desafios e tarefas exploratórias, questionando, fornecendo dicas e pistas e, ao mesmo tempo, ajudando a pensar de maneira mais profunda sobre os conceitos, ideias e problemas. Portanto, as tarefas propostas pelo professor têm um papel basilar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e as de maior potencial criativo são aquelas que incentivam as crianças a descobrir e a construir o seu próprio conhecimento (Ponte, 2007).

Uma abordagem pedagógica criativa carateriza-se pela conceção de tarefas que convidam a respostas criativas dos alunos (Zazkis & Holton, 2009). A criatividade surge, muitas vezes, através de tarefas que visam aumentar o conhecimento e a compreensão dos conceitos matemáticos. A apresentação dos conceitos matemáticos de diversas formas, recorrendo a uma multiplicidade de materiais e meios de representação, revela a própria criatividade dos professores no trabalho realizado com os seus alunos (Yew, 2008). Enquanto mediador entre os alunos e o conhecimento matemático, cabe ao professor propor tarefas diversificadas que permitam aceder a conteúdos matemáticos e, ao mesmo tempo, destacar e desenvolver processos matemáticos tais como ensaiar, experimentar, conjeturar, investigar, comunicar e criar (Vale & Pimentel, 2011). Portanto, a construção de tarefas adequadas, desafiantes e estimulantes é uma função primordial dos professores.

Tarefas de caráter aberto, variadas e não fastidiosas, contribuem para a promoção e desenvolvimento do conhecimento e da criatividade dos alunos (Kattou, Kontoyianni & Christou, 2008). Aprender a desenvolver, adaptar, selecionar e aplicar boas tarefas não é simples nem trivial, é antes um desafio pedagógico considerável para os professores, que implica reflexão, tomada de decisões, planeamento e execução, em grande medida suportados pelos seus conhecimentos e crenças (Applebaum & Leikin, 2007). O desafio matemático e a compreensão da sua essência e do seu grau de dificuldade, bem como o significado e as implicações de abordar tarefas desafiadoras, fazem parte integrante do conhecimento profissional dos professores (Applebaum & Leikin, 2007). A própria natureza da Matemática pode ser um andaime para fomentar a criatividade, sobretudo se a atividade matemática for vista como intrinsecamente criativa (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012).

2.7.3. Os professores e a criatividade na resolução de problemas

A essência da Matemática está no processo de pensar criativamente e não simplesmente em chegar à resposta correta de uma dada questão ou problema (Mann, 2006). Face a esta visão, e no sentido de destacar a importância da criatividade matemática, Leikin (2009a) defende que o desenvolvimento do potencial criativo de cada aluno deve ser um objetivo da Matemática escolar. Se considerarmos que a criatividade matemática está intimamente relacionada com a resolução de problemas, então é necessário oferecer aos professores experiências diversificadas para desenvolverem as suas habilidades nesta área, não só ao longo sua prática de ensino mas também no plano das suas vidas (Vale, Barbosa & Fonseca, 2014).

De entre os múltiplos processos matemáticos que contribuem para a promoção da criatividade, a resolução de problemas é considerado por muitos como o mais indicado (Kattou, Kontoyianni & Christou, 2008). Com efeito, a criatividade pode ser promovida através do uso de problemas desafiadores, processo no qual os professores devem ajudar os alunos a tomar consciência das suas próprias habilidades (Mina, 2008). Os professores que concebem a criatividade matemática como intimamente relacionada com a atividade de resolução de problemas consideram as respetivas resoluções como sendo processos criativos (Yee, 2008). Esta relação entre a criatividade e a resolução de problemas é destacada na literatura em resultado de vários estudos. Por exemplo, o quadro que emergiu do estudo levado a cabo por Yee (2008), acerca das conceções dos professores, revelou que a maioria vê o conceito de criatividade ligado a situações onde os alunos resolvem problemas de Matemática, de forma única e não convencional e através de métodos e estratégias nunca antes ensinados. Neste sentido, e uma vez que a criatividade matemática escolar está fortemente associada à resolução de problemas, os alunos devem ter oportunidades para se envolver nessa atividade, podendo, dessa forma, experimentar a criatividade, aprendendo a refletir sobre suas próprias ideias (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012).

Tudo isto é pouco compatível com currículos que apelam ao formalismo simbólico e abstrato e com práticas de sala de aula focadas em tarefas de reforço de conhecimentos, baseadas em regras aprendidas anteriormente, que esquecem largamente a essência dos problemas matemáticos (Mann, 2006). Ao invés, interessa que os alunos sejam confrontados e desafiados com problemas cujas soluções não são imediatas, nos quais devem usar mais do que as rotinas já conhecidas ou os algoritmos aprendidos previamente. Assim, através do apoio e orientação dos professores, os alunos devem ter a oportunidade de integrar os seus fragmentos de conhecimento para formar uma visão coerente da situação problemática e empregar vários processos que à primeira vista parecem ser independentes (Mann, 2006; Shriki, 2009). Muito importante, ainda, é que os professores deem aos alunos tempo para pensar criativamente, dado que muitas vezes a criatividade requer algum tempo de incubação. A maioria das ideias criativas não ocorre prontamente, os alunos precisam de tempo para, por exemplo, compreender um problema e conceber um caminho para resolvê-lo. Se os alunos são convidadas a pensar de forma criativa, então deve dar-se-lhes tempo para fazê-lo bem (Sternberg, 2003).

É preciso ter a noção de que a metodologia de resolução de problemas, por si só, não garantirá uma produção criativa por parte dos alunos, ou seja, há que criar adicionalmente um clima favorável à expressão da criatividade. Por exemplo, é fundamental que os professores apoiem os alunos em termos emocionais e na sua relação afetiva com a Matemática, ajudando-os a ultrapassar bloqueios emocionais, como o medo de errar, o medo de ser criticado, ou sentimentos de inferioridade e insegurança (Gontijo, 2010).

As práticas dos professores relacionadas com a atividade de resolução de problemas estão positivamente associadas à motivação, ao desempenho e à realização dos alunos (Pantziara & Philippou, 2007). Por outro lado, a criatividade geralmente cresce em ambientes que dão valor ao interesse, envolvimento, satisfação e entusiasmo dos jovens com tarefas desafiadoras (Beghetto e Kaufman, 2013). Para muitos professores, os ambientes de enriquecimento matemático, para além da sala de aula, como é o caso da competição matemática SUB12, motivam os alunos para a resolução de problemas de diferentes níveis de dificuldade e, ao mesmo tempo, atendem às suas necessidades próprias de aprendizagem, de acordo com as suas idades e aptidões. Esses ambientes proporcionam aos estudantes problemas desafiadores, transmitem valorização pelas suas ideias e, ao mesmo tempo, fomentam uma nova visão sobre a resolução de problemas de Matemática (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012).

Através deste tipo de atividades de enriquecimento curricular é possível aceder naturalmente às estratégias e formas de comunicação utilizadas pelos alunos, permitindo compreender o raciocínio que constroem e as suas abordagens próprias (Freiman & Lirette-Pitre, 2008). Têm como grande vantagem a existência de espaço e de liberdade para o emergir de ideias e resoluções criativas, invulgares ou fora do comum, dando crédito, reconhecimento e mérito aos atos criativos (Applebaum & Saul, 2009). Em conclusão, o pleno desenvolvimento do potencial criativo dos alunos exige que os professores reconheçam e incentivem a criatividade matemática, dentro ou fora da sala de aula, tirando partido, entre outras, de atividades de enriquecimento curricular centradas na resolução de problemas (Beghetto, 2013b).

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

3.1. Paradigmas e abordagens ao estudo da criatividade

Neste capítulo é descrita a metodologia de investigação adotada, incluindo o papel do investigador, o processo de recolha de dados e os procedimentos utilizados na análise dos dados empíricos.

Muitos dos estudos que podem ser encontrados sobre a criatividade tendem a adotar uma metodologia quantitativa, baseada numa perspetiva psicométrica do fenómeno da criatividade.

Plucker e Renzulli (1999) descrevem algumas das tendências que se foram desenvolvendo ao longo do tempo nos métodos de investigação da criatividade. Uma das tónicas é a grande quantidade de estudos integrados na corrente psicométrica, algo que parecerá paradoxal se tivermos em conta que a generalidade dos investigadores está de acordo sobre o facto de a criatividade ser extremamente difícil de definir e portanto de medir. Por outro lado, as metodologias de natureza psicométrica também se têm diversificado, continuando a ser usadas para avaliar a criatividade dos produtos, determinar a influência das caraterísticas do ambiente, encontrar formas de contabilizar a geração de ideias, estabelecer as caraterísticas de personalidade associadas à criatividade e outros objetivos. O *design* destes estudos apoia-se na análise de correlação e noutros métodos estatísticos de comparação. A par deste tipo de metodologias, os mesmos autores referem o aparecimento dos estudos experimentais e quasi-experimentais, que se preocupam mais em encontrar relações de causalidade, como por exemplo, o efeito da exposição dos sujeitos a formas incomuns de resolução de problemas sobre o nível de criatividade observado.

Outras metodologias de investigação, com caraterísticas diferentes, incluem a abordagem biométrica, e mais especificamente neurométrica, que procura entender a atividade e as funções cerebrais associadas ao desempenho de tarefas consideradas "tipicamente" criativas, como o caso da resolução de problemas matemáticos. Finalmente, ainda mais distanciada das anteriores, surge a metodologia de estudo de caso, a qual tem estado presente em estudos de caráter biográfico e histórias de vida, centrados na pessoa criativa e na pesquisa sobre os traços de personalidade (Gruber &

Wallace, 1999). Nesta linha de investigação, estudar um "caso de criatividade" significa procurar saber o que fazem as pessoas quando estão a ser criativas ou como é que as pessoas criativas tiram partido dos recursos disponíveis para fazer algo que nunca foi feito antes (Gruber & Wallace, 1999).

O desenvolvimento da psicologia cognitiva veio estimular os estudos em que a criatividade é encarada como subjacente às habilidades excecionais, motivando trabalhos de investigação focados nos indivíduos geniais, sobredotados ou reveladores de capacidades extraordinárias, bem como na identificação e avaliação das caraterísticas dos produtos criativos (Candeias, 2008).

A ideia de que o pensamento divergente, por si só, não é garantia de criatividade, e que o comportamento criativo é influenciado por processos lógicos e pela capacidade de testar hipóteses e avaliar resultados, começou a ganhar maior adesão e a investigação voltou-se naturalmente para o processo de resolução de problemas (Sternberg & Lubart, 1999). As abordagens de natureza sociocultural vieram entretanto destacar uma interação dinâmica entre a pessoa e o contexto, levando por um lado a um afastamento da procura da significância estatística e por outro a uma atenção crescente aos domínios específicos em que ocorre o processo criativo (por exemplo, a matemática, a música, a pintura ou a poesia).

Mais recentemente têm sido procurados e ensaiados modelos ditos integrativos e sistémicos que procuram atender à complexidade e ao dinamismo inerentes ao fenómeno da criatividade (Candeias, 2008). Na linha dos modelos sistémicos ou multidimensionais da criatividade, vários autores têm proposto o estudo das interações entre três elementos principais: *a pessoa* (habilidades cognitivas, conhecimento, estilo de pensamento, personalidade, motivação intrínseca, investimento), *o domínio* (corpo de conhecimentos numa determinada área temática), e *o campo* (o contexto em que o corpo de conhecimento é elaborado, incluindo as pessoas que nele trabalham, que dão acesso ao domínio e que validam a inovação nesse domínio) (Candeias, 2008; Fleith & Alencar, 2005; Csikszentmihalyi, 1999).

Apesar de se considerar que uma perspetiva sistémica é mais apropriada e menos redutora, e até mais necessária porque olha para o fenómeno como resultado de uma confluência de fatores, esta acarreta consequências práticas sobre o modo de avaliar a criatividade:

> A avaliação deverá então focalizar a pessoa, os produtos e o contexto, integrando abordagens qualitativas e quantitativas, focalizadas na

compreensão e no desempenho. As abordagens avaliativas devem sujeitar-se aos objetivos do avaliador e do modelo conceptual, mais do que sustentar o modelo nas opções avaliativas disponíveis. Neste Campo, a avaliação deve incidir sobre os padrões e as regularidades da pessoa e dos contextos que explicam o processo criativo e a qualidade dos produtos criativos, mas deverá também olhar para o dinamismo dos processos intrínsecos e extrínsecos que favorecem a ocorrência da criatividade (Candeias, 2008, p. 61).

O presente estudo procura integrar-se numa visão sistémica, ainda que assuma focalizações privilegiadas com vista a descrever e caraterizar a criatividade matemática no contexto de uma competição de resolução de problemas matemáticos, realizada para além da sala de aula. Assim, elegeu-se: i) como Campo, o campeonato de resolução de problemas de matemática SUB12, envolvendo as suas regras, modo de funcionamento, traços caraterísticos, os alunos participantes e os professores de Matemática que os acompanham, apoiam e conhecem, ii) como Domínio, a resolução de problemas matemáticos não rotineiros, acessíveis a alunos do 2.º ciclo do ensino básico, relacionados com diversos tópicos matemáticos e permitindo várias formas de resolução possíveis, e iii) como Pessoas, um conjunto de alunos (de 5.º e 6.º ano) apurados para a Final do campeonato, numa das suas edições anuais, e respetivos professores de Matemática.

No que se refere às focalizações privilegiadas, optou-se por analisar as produções de alunos participantes na fase de apuramento do campeonato, em três das edições, e selecionar um conjunto de alunos finalistas e respetivos professores para a realização de entrevistas, após a Final de uma dessas edições. Na verdade, embora as entrevistas possam ser vistas como meios de focalização sobre a pessoa, de facto, neste estudo, visam principalmente a interação entre os produtos criativos e o contexto em que estes ocorrem. Isto decorre, em particular, do facto de o modelo de criatividade proposto no estudo assumir que a criatividade matemática é uma capacidade da mente humana que pode ser estimulada e desenvolvida e deve ser valorizada e que o contexto possui um papel preponderante no processo criativo (Grainger & Barnes, 2006; Hershkovitz, Peled & Littler, 2009; Leikin, 2009a; Mann, 2006; Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012; Samaniego, 2008; Candeias, 2008).

Da pesquisa teórica realizada sobre a criatividade em educação matemática, e em particular na resolução de problemas, não se encontraram estudos que se debrucem sobre esta capacidade matemática em atividades extracurriculares, de que é exemplo o Campeonato de Resolução de Problemas SUB12. Pelo contrário, tendo em conta os estudos e publicações na área em que se insere o presente trabalho de investigação, é manifesto que ainda há muito trabalho a desenvolver no campo da criatividade na educação matemática, mais especificamente ao nível da resolução de problemas. Ainda assim, é destacado em trabalhos anteriores (p. ex. Freiman, 2009; Freiman & Applebaum, 2009; Freiman & Lirette-Pitre, 2008; Jones & Simons, 1999; Jacinto, 2008; Koichu & Andzans, 2009; Losada, Yeap, Gjone & Pourkazemi, 2009) que as atividades de enriquecimento curricular, para além da sala de aula, assumem um papel claro no desenvolvimento da criatividade matemática dos alunos. Desse modo, considerou-se relevante e oportuno aprofundar o conhecimento sobre a criatividade matemática no contexto da resolução de problemas associado a uma competição matemática.

Por um lado, pretende-se caraterizar a criatividade matemática na resolução de problemas em contexto extraescolar, mediante a análise de resoluções criativas de alunos do 2.º ciclo do ensino básico, envolvidos em três edições anuais do SUB12, com base num referencial proposto para o efeito (Morais & Azevedo, 2009). Em paralelo, e no intuito de procurar elementos do contexto dessa competição relevantes para o desenvolvimento da criatividade matemática, optou-se por procurar conhecer a perspetiva de um conjunto de alunos participantes numa das Finais do campeonato e dos respetivos professores.

3.2. O *design* da investigação

A escolha da metodologia mais adequada é uma das decisões mais importantes e ao mesmo tempo mais difíceis que cabe ao investigador tomar, pois a metodologia do estudo é um fator que se repercute na sua qualidade global. Assim, é essencial que a metodologia adotada não se desligue do problema a estudar e tenha em conta a natureza das questões de investigação (Yin, 1989).

Ao longo dos tempos têm sido discutidas as vantagens que as investigações qualitativas e quantitativas assumem nas ciências sociais. O paradigma positivista recorre a métodos experimentais e medições quantitativas preocupando-se com a quantificação, previsão e formulação de leis gerais, analisando correlações entre variáveis, recolhendo dados por via de questionários fechados, experimentação controlada e observações dirigidas e testes. A perspetiva naturalista afasta as ferramentas métricas e defende que os fenómenos humanos constituem o objeto de estudo e, portanto, socorre-se de métodos próprios que permitem a compreensão da multiplicidade de aspetos que definem as situações em estudo.

A investigação qualitativa foca-se na profundidade e compreensão dos fenómenos numa perspetiva interpretativa, recorrendo a dados recolhidos por intermédio da observação participante, de entrevistas mais ou menos estruturadas e da utilização de vários documentos (Vasconcelos, 2010). Os esforços concentram-se na compreensão dos indivíduos e dos fenómenos humanos, de forma holística e tendo em conta o contexto natural em que os factos acontecem. Dentro deste paradigma não só é impossível estabelecer a verdade absoluta, como a verdade relativa também é limitada pelo tempo e pelo contexto em que se observa (Fontana & Frey, 1994).

No campo da pesquisa qualitativa, a metodologia de estudo de caso é entendida como uma abordagem significativa e com uma tradição bem firmada (Creswell, 2003; Denzin & Lincoln, 2008). O estudo de caso diferencia-se de outras abordagens metodológicas pelo facto de concentrar a investigação sobre um sistema limitado ou caso. Assim, situando-se os objetivos e a atenção do presente estudo sobre aspetos da manifestação, caraterização e compreensão da criatividade matemática no quadro bem definido de uma atividade educacional – o contexto do campeonato de resolução de problemas SUB12 – o estudo de caso parece a abordagem metodológica natural para procurar respostas às questões formuladas.

A presente investigação debruça-se sobre o fenómeno da criatividade matemática associada à atividade de resolução de problemas matemáticos desafiadores propostos em competições matemáticas, tomando o caso do SUB12 como contexto empírico privilegiado para a obtenção de dados e informações sobre as questões em estudo. Nesse sentido, privilegiam-se como fontes de dados os produtos realizados por jovens participantes em três edições consecutivas do campeonato e as opiniões reveladas por alunos que chegaram à fase final e pelos seus professores sobre a criatividade matemática na resolução de problemas associada a este contexto.

Como é referido por Yin (1994), o estudo de caso é uma investigação empírica que visa estudar um determinado fenómeno no seu tempo atual e dentro do seu contexto real, muitas vezes quando as fronteiras entre o fenómeno e o contexto em que este ocorre não são claramente percetíveis. O estudo de caso, por outro lado, não envolve controlo explícito ou manipulação de variáveis: o foco está na compreensão profunda do fenómeno e do seu contexto (Cavaye, 1996). Também por esta razão, adotar a metodologia de estudo de caso tem sentido neste estudo, dado que se pretende uma compreensão da criatividade matemática numa competição de resolução de problemas, procurando conhecer as perspetivas e visões dos mais diretos intervenientes no contexto do campeonato de resolução de problemas SUB12: os alunos participantes na competição e os seus professores, que os apoiam, acompanham e incentivam até à Final desse campeonato.

Ao longo do processo de investigação prevaleceu o trabalho de descrição do fenómeno da criatividade matemática e das suas interações com diversos aspetos da atividade de resolução de problemas e do contexto competitivo escolhido, numa visão tão integradora quanto possível, como sucede em geral com a investigação interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994; Matos & Carreira, 1994).

O estudo de caso, bem como outras modalidades de investigação interpretativa, é um tipo de metodologia que se preocupa com o que está na base de comportamentos e atitudes, opiniões ou convicções, privilegiando o ponto de vista dos indivíduos enquanto participantes no contexto empírico do estudo (Kothari, 2004; Bogdan & Biklen, 1994).

O ambiente natural é a fonte direta dos dados e o investigador é o principal instrumento de recolha, geralmente em contacto próximo e prolongado com o fenómeno a ser investigado (Sharma, 2010; Bogdan & Biklen, 1994; Ludke & André, 1986). O contexto natural do estudo não sofre, por norma, alterações impostas pelo investigador, que o interpreta com a intenção de descrever a realidade e os significados que esta assume, dando nota dos factos relevantes envolvidos no contexto (Vasconcelos, 2010).

O estudo de caso possui um forte cunho descritivo, com métodos próprios para a compreensão da multiplicidade de aspetos que caraterizam a situação em estudo. Apoia-se numa descrição factual e sistemática, tão completa quanto possível, do fenómeno em investigação (Ponte 1994), sendo a primeira tarefa do investigador descrever e só depois analisar os dados (Tuckman, 2005).

O intuito de um estudo de caso não é generalizar, mas sim aprofundar o conhecimento através da identificação de um caso, ao mesmo tempo suficientemente complexo e com potencialidades para gerar informação pertinente; no presente estudo, o contexto do SUB12 estabeleceu-se como o *caso* para o estudo da criatividade matemática numa competição de resolução de problemas. Analisam-se, não apenas os produtos criativos desses participantes mas também as potencialidades do contexto e as experiências de resolução de problemas dos participantes, considerando os significados que estes lhes atribuem (Sharma, 2010). Os dados são qualitativos e não pretendem constituir medições, pois correspondem essencialmente a qualidades e atributos da criatividade matemática. A sua função primordial é a de gerarem *insights* relevantes sobre o fenómeno da criatividade manifestada no contexto deste estudo (Walliman, 2011).

A fiabilidade de um estudo qualitativo pressupõe a sua credibilidade, que implica oferecer confiança não apenas sobre aquilo que o investigador faz mas também sobre a sua integridade ética na recolha de dados e análise e apresentação dos resultados e nas possíveis implicações destes para os indivíduos envolvidos na pesquisa (Azevedo, Oliveira, Gonzalez & Abdalla, 2013). A fiabilidade pressupõe também evitar visões tendenciosas sobre o fenómeno em estudo (Yin, 1989); no presente trabalho isso levou a que o investigador tenha procurado olhar como um observador externo para o fenómeno da criatividade no contexto do campeonato matemático SUB12.

A caraterística que melhor traduz a abordagem metodológica de estudo de caso é o estudo intensivo e detalhado de uma identidade bem definida que pode ser uma pessoa, uma família, uma instituição, uma organização ou uma comunidade (Coutinho & Chaves, 2002). É essencialmente uma investigação intensiva e em profundidade, cujo objetivo é encontrar padrões de comportamento e perspetivá-los na globalidade de um fenómeno mais amplo (Kothari, 2004).

Nesta investigação, a metodologia de estudo de caso tem como intuito evidenciar traços da criatividade matemática no SUB12, buscando padrões de manifestação dessa criatividade através da análise de resoluções criativas e dos pontos de vista dos intervenientes na competição sobre os fatores de desenvolvimento da criatividade matemática (Vasconcelos, 2010).

Ponte (1994) afirma que o propósito de um estudo de caso é descrever e analisar. A estas finalidades, Merriam (1998) acrescenta uma outra intenção: avaliar. Qualquer que seja o seu propósito mais saliente, um estudo de caso tem sempre uma intenção holística, isto é, tem por objetivo compreender o "caso" (Coutinho & Chavez, 2002). O principal objetivo de um estudo de acaso é conhecer uma realidade bem definida num determinado contexto, com a pretensão de compreender em profundidade o "como" e os "porquês" do fenómeno em estudo, destacando vários dos seus aspetos próprios, principalmente os que servem as questões do estudo, numa situação específica e supostamente única (Ponte, 2006). O grande propósito é considerar o fenómeno investigado no seu todo e na sua unicidade (Coutinho, 2002). Por isso, normalmente, é uma investigação de natureza empírica, baseada em trabalho de campo e/ou em análise documental; estuda os fenómenos no contexto real, a partir de variadas fontes de dados como, por exemplo, entrevistas, observações, documentos e artefactos; e é usada quando se pretende compreender uma situação e não com o intuito de a transformar (Ponte, 2006). A construção dos instrumentos e das categorias de análise vai evoluindo à medida que a investigação avança, sendo importante, ao concluir-se o estudo, atingir a sua explicitação com clareza (Moraes, 1999).

A credibilidade de um estudo de caso depende dos critérios de validade e fidedignidade. A questão da validade coloca-se quando o investigador procura explicar fenómenos em que é importante reduzir ao mínimo a influência da subjetividade que lhe é inerente (Coutinho & Chaves, 2002). Pode ser alcançada através da profundidade, riqueza e escopo dos dados do estudo, por via da triangulação e pelo distanciamento ou imparcialidade do investigador (Cohen, Manion & Morrison, 2007). A fim de extrapolar os resultados para além dos limites da própria experiência, a investigação deve encontrar eco no mundo real, ou seja, possuir tanto validade interna (as interpretações e resultados são suportados pelos dados) como validade externa (os resultados podem ser transferidos para outras situações similares) (Walliman, 2011).

Em síntese, a qualidade de uma investigação de estudo de caso baseia-se na densidade, riqueza e variedade dos materiais empíricos do estudo que permitirão um maior grau de profundidade na descrição do caso. Simultaneamente, os resultados de um estudo de caso beneficiam da compreensão que deles se obtém no diálogo com uma ou mais perspetivas teóricas sobre o fenómeno investigado.

3.3. O SUB12 como contexto do estudo

O campeonato de resolução de problemas SUB12 é dinamizado pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade do Algarve, e destina-se a alunos do 5.º e do 6.º ano de escolaridade das regiões do Algarve e do Alentejo. Esta competição surgiu em 2004/2005 e realiza-se através da Internet, estando na sua génese a intenção de promover nos jovens o gosto pela Matemática e pela resolução de problemas.

O campeonato é estruturado em duas fases distintas: a fase de apuramento e a fase da final. A *fase de apuramento*, a mais importante para este estudo, decorre entre Janeiro e Junho e desenrola-se integralmente através da Internet, a partir do *website* do Campeonato. Aí são publicados quinzenalmente os problemas da competição, aos quais os alunos respondem por email, e é também disponibilizada toda a informação relativa ao funcionamento da competição.

A utilização do email permite uma comunicação bilateral e individualizada entre cada participante e a equipa organizadora, que informa cada concorrente sobre as resoluções enviadas e oferece *feedback*, possibilitando a cada participante corrigir, completar e validar as suas resoluções, durante o período de submissão de respostas. Se a resolução do problema estiver totalmente correta os alunos são felicitados e incentivados a continuar, caso contrário são fornecidas pistas que procuram ajudar e apoiar na busca da solução correta. O tempo disponibilizado durante esta fase e a liberdade para pensar sobre cada problema são condições consideradas desejáveis para o desenvolvimento da criatividade que nem sempre estão disponíveis no sistema escolar. A *fase final* consiste num torneio presencial que decorre na Universidade do Algarve, constituído por uma prova de cinco problemas, resolvidos em tempo limitado.

Os problemas propostos neste campeonato podem ser descritos como desafios matemáticos moderados e podem envolver diferentes tópicos matemáticos (Números e operações, Geometria, Álgebra, Raciocínio lógico, Combinatória, etc.), alguns dos quais relacionados com temas do programa de Matemática e fazendo eco das capacidades transversais preconizadas pela renovação curricular de 2007 – resolução de problemas, comunicação e raciocínio (ME, 2007). São problemas de palavras contextualizados que apresentam uma situação bem definida com base na qual os alunos podem trabalhar conceitos matemáticos. Para chegarem à solução de cada um dos problemas, não bastará aos alunos aplicar fórmulas, procedimentos e técnicas aprendidos previamente. Terão de encontrar os seus próprios métodos e estratégias para resolver os problemas propostos, sendo que qualquer desses problemas admite mais do que uma forma de resolução. Portanto, os alunos encontram aqui uma oportunidade de pensar por si próprios, de construir estratégias de resolução e argumentações, tal como de relacionar conhecimentos e recorrer a várias formas de representação na busca das soluções (Gontijo, 2006).

Nesta atividade não se pretende condicionar o caminho para chegar à solução ou impor modelos pré-definidos ou treinar a aplicação de conhecimentos prévios; pelo contrário, permite-se e valoriza-se a criatividade dos solucionadores. Trata-se, como tudo indica, de uma competição com potencialidades para promover o desenvolvimento da criatividade matemática e do pensamento independente, onde os participantes podem exibir o seu talento e em que surgem com frequência resoluções inesperadas e inovadoras (Carreira, Amado, Ferreira, Silva, Rodriguez *et al*, 2012). A única imposição constante das regras do campeonato está na obrigatoriedade dos concorrentes apresentarem e explicarem todo o processo de resolução do problema, descrevendo o raciocínio utilizado, numa linguagem o mais clara possível.

O SUB12 é uma competição que procura criar desafios e condições favoráveis ao desenvolvimento intelectual, afetivo e social, através de elementos emocionais que marcam este contexto, tais como, motivação, curiosidade, compromisso, humor, imaginação, alegria, satisfação, sucesso, etc. Contempla a possibilidade de os alunos participarem em pequenas equipas e de receberem ajuda e discutirem os problemas e estratégias com os colegas, amigos, familiares, professores, tornando a atividade de resolução de problemas parte de um contexto de índole social. Leva a experiência matemática para além da sala de aula e do currículo regular, o que é particularmente benéfico para os alunos que gostam de Matemática e que apreciam atividades e ambientes de aprendizagem diferentes do contexto escolar (Freiman, 2009).

É acima de tudo uma competição inclusiva, dado que se destina a todos os alunos e não apenas aos melhores e mais dotados para a Matemática. Em suma, o SUB12 consiste numa competição com potencialidades pedagógicas, dada a sua aposta na promoção da resolução de problemas, ainda que como atividade de enriquecimento curricular. Constitui uma atividade de enriquecimento porque promove um conjunto de competências nitidamente enquadradas com os objetivos e finalidades da educação matemática e com as recomendações do currículo.

É a partir deste caso que o presente estudo procurará evidenciar, caraterizar e enquadrar a criatividade matemática manifestada na resolução de problemas num ambiente competitivo mas marcadamente inclusivo, que tem lugar para além da sala de aula. Estudar a criatividade matemática no contexto do SUB12 é selecionar um caso em que a resolução de problemas matemáticos gera frequentemente produtos originais e únicos – tendo em conta os concorrentes bastante jovens – que são notáveis pela perspicácia do pensamento matemático e pela forma de exprimir a resolução; é também considerar um contexto que, pela sua natureza inclusiva e próxima da realidade dos alunos e das escolas, apresenta um elevado índice de popularidade e adesão, tanto dos jovens que nele participam como dos professores que os incentivam e apoiam nessa participação.

3.4. O papel do investigador

Num estudo qualitativo é exigido ao investigador um certo distanciamento relativamente ao fenómeno em estudo, mas esse distanciamento não é sinónimo de neutralidade, uma vez que o investigador transporta para o estudo formas próprias de pensar, encarar, considerar e interpretar os dados (Bogdan & Biklen, 1994; Matos & Carreira, 1994). No presente estudo, assume-se claramente uma conceção de criatividade matemática que procura afastar-se da equiparação da criatividade à genialidade; ao invés, propõe-se a criatividade matemática como um potencial de todos os indivíduos que pode ser desenvolvido e estimulado quando são criadas e acauteladas condições que a favoreçam.

A análise e interpretação dos dados de uma investigação qualitativa constituem uma etapa que é entendida como complexa e problemática, na medida em que impõe ao investigador o controlo sobre os seus pressupostos e expectativas. Porém, a subjetividade deve ser levada em conta, razão pela qual se espera que o investigador esteja envolvido no fenómeno e seja capaz de refletir sobre ele como se estivesse de fora (Eisenhart, 1988, citado por Ponte, 1994).

De certo modo, a análise de conteúdo contém uma interpretação pessoal do investigador que reflete a sua perceção dos dados (Moraes, 1999). Mas tal não impede a qualidade de um estudo de caso. Segundo Yin (1989), é imprescindível que o investigador possua determinadas caraterísticas, destacando-se, entre outras: a capacidade para fazer perguntas e interpretar as respostas; ouvir e não se deixar prender pelas suas próprias ideologias e perceções; adaptar-se e ser flexível de modo a conseguir encarar novas situações como oportunidades e não como uma ameaça; ter o firme domínio das questões em estudo; e a capacidade de evitar noções preconcebidas, incluindo as que decorrem da própria teoria.

Para além do distanciamento necessário, a fidedignidade de um estudo científico, seja ele quantitativo ou qualitativo, está dependente da replicabilidade das conclusões obtidas, isto é, da possibilidade de diferentes investigadores chegarem a resultados idênticos sobre o mesmo fenómeno, utilizando os mesmos instrumentos e procedimentos (Coutinho & Chaves, 2002). Por isso, o investigador deve fazer uma descrição o mais pormenorizada possível de todas as etapas seguidas e conduzir o estudo como se fosse um elemento exterior, para que outros, de forma independente, produzam resultados idênticos nas mesmas circunstâncias ou em contextos semelhantes

(Sharma, 2010). Além disso, é fundamental que as conclusões apresentadas não se restrinjam à imaginação do investigador (Ponte, 2006). Assim, neste estudo o investigador propôs-se olhar para o fenómeno em função das questões de investigação e prevendo diferentes fontes de dados, procurando assim reforçar a coerência e transferibilidade dos resultados do estudo (Azevedo, Oliveira, Gonzalez & Abdalla, 2013).

3.5. O processo de recolha de dados

A recolha de dados é uma importante fase da investigação que exige ao investigador cuidado na seleção das fontes que serão relevantes para a sua investigação. A recolha criteriosa de dados deve ter em conta pelo menos três questões: O que recolher? De onde recolher? Como recolher?. A primeira questão está relacionada com uma definição pertinente dos dados. A segunda questão refere-se à delimitação do campo de análise e à seleção das fontes de dados. E a última questão prende-se com a escolha do procedimento de recolha mais adequado (Gerhardt, Ramos, Riquinho, Santos & 2009).

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) e Tuckman (2005), existem três grandes métodos de recolha de dados em investigações qualitativas: observação, inquérito (entrevista ou questionário) e recolha de documentos. O uso de diversos tipos de dados permite obter várias perspetivas sobre a mesma situação e informações de diferentes naturezas para conseguir uma descrição mais rica e detalhada dos fenómenos (Azevedo, Oliveira, Gonzalez & Abdalla, 2013).

No presente estudo, a diversificação das fontes e dos instrumentos de recolha, possibilitou obter um variado e significativo conjunto de dados. A multiplicidade de fontes corresponde à necessidade de contemplar diversas vertentes do objeto de estudo, de forma a proporcionar uma visão holística e sistémica da criatividade matemática na resolução de problemas, no contexto de uma competição matemática.

Ao encetar uma fase de pilotagem do trabalho de investigação, recolheram-se informações relativas ao funcionamento e caraterísticas do SUB12, consultando as edições anteriores, regulamentos e algumas resoluções de alunos participantes disponíveis na página Web do campeonato. Esta primeira abordagem permitiu esquematizar e delinear a metodologia, afinar os objetivos do estudo e as questões de investigação. Assim, foi decidido que os dados seriam obtidos a partir de: i) registos documentais de várias fases de apuramento, correspondentes às resoluções enviadas por *email* pelos participantes relativas a cinco problemas distintos, e ii) entrevistas a seis alunos participantes numa Final presencial do campeonato e respetivos professores de Matemática. Além disso, o investigador usou um diário de notas onde registou as suas reflexões ao longo do processo de recolha de dados. As entrevistas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas. Uma vez recolhidas as resoluções dos problemas, efetuadas e transcritas integralmente as entrevistas realizadas aos participantes e revistas as notas do investigador, os dados foram tratados e analisados, procedendo-se à sua segmentação, codificação e análise interpretativa à luz das questões de investigação e do quadro teórico de suporte.

3.5.1. Recolha de dados documentais

Uma vez que não se pretende generalizar resultados, a seleção das resoluções dos alunos foi intencional (Carmo & Ferreira, 1998) e em consonância com o objeto de estudo, isto é, a criatividade matemática manifestada na resolução de problemas. O acesso às produções dos participantes na competição resultou do envolvimento do investigador no projeto Problem@Web, como membro da equipa de investigação.

Os cinco problemas escolhidos para análise da criatividade das resoluções distribuem-se pelos três anos de execução do referido projeto: 2010/11, 2011/12 e 2012/13. O intuito desta extensão temporal, que corresponde a três edições consecutivas, foi o de encontrar indícios da criatividade matemática independentemente da edição do campeonato. Escolheram-se dois problemas da edição 2011/12 (ver anexo 1 e 2) e dois da edição 2012/13 (ver anexo 3 e 4) e ainda um problema da edição 2010/11 (ver anexo 5).

Para cada problema foram selecionadas 10 resoluções, tendo como critérios a sua originalidade, o conhecimento matemático envolvido e as formas de representação utilizadas. Com essa amostra de 50 resoluções pretendeu-se obter dados acerca da criatividade matemática evidenciada nos produtos criativos, cuja análise foi sustentada por um referencial de categorias analíticas desenvolvido e proposto para o efeito, que será descrito adiante bem como explicada a sua operacionalização.

Poder-se-ia perguntar porque é que se optou pela fase de apuramento, que decorre à distância, onde as resoluções foram construídas e/ou editadas pelos participantes no computador e enviadas por *email*, e não pelas resoluções produzidas pelos alunos na final, numa prova presencial realizada com papel e lápis. Na verdade, as produções oriundas das fases finais do SUB12 não foram descartadas sem antes terem sido examinadas. Inicialmente, obteve-se uma amostra de dimensão considerável de resoluções das finais do SUB12 das edições 2008/09 e 2009/10 (note-se que o SUB12 reúne entre 150 a 300 alunos em cada final), às quais foi aplicado o referencial de análise proposto neste estudo para detetar evidências da criatividade matemática. Este ensaio de análise dessas resoluções evidenciou que a pressão do tempo limitado e o fator de competição mais intenso (a procura dos três vencedores que são premiados) são fatores limitadores da manifestação da criatividade dos participantes. A confirmação foi óbvia quando se compararam as resoluções das fases finais com as resoluções produzidas para os problemas ao longo das fases de apuramento.

É importante sublinhar que o recurso ao computador na fase de apuramento não foi, regra geral, sinónimo da presença de algum tipo de conhecimento matemático ou de formas de representação particulares que seriam inacessíveis através de papel e lápis. Observando as resoluções selecionadas, facilmente se constata que as representações usadas são passíveis de ser construídas com papel e lápis. O uso do computador promoveu, globalmente, uma melhor organização e expressão do conhecimento matemático mobilizado e das estratégias utilizadas em cada resolução.

Interessa realçar que em cada fase de apuramento os participantes dispuseram de 15 dias para resolverem cada problema proposto, e que o grau de dificuldade foi tendencialmente progressivo, do primeiro para o último problema.

Note-se também que os problemas propostos nas fases de apuramento não exigem a aplicação de conteúdos curriculares específicos e, como tal, os participantes apenas precisam de mobilizar o seu próprio conhecimento matemático para conceberem estratégias de resolução e escolher representações para desenvolver e comunicar as suas resoluções. O conhecimento prévio é essencial para a organização de novas informações e influencia a compreensão dos problemas e a escolha das estratégias de resolução. Esta situação leva a que alguns participantes no SUB12 abordem os problemas de forma inesperada, através de resoluções únicas e originais, como revela a amostra selecionada para este estudo.

Para a seleção das resoluções a considerar (10 resoluções para cada um dos 5 problemas usados), foi determinante: a sua singularidade, o conhecimento matemático mobilizado, as estratégias desenvolvidas e as formas de representação utilizadas. É importante esclarecer que a opção de escolher resoluções originais numa primeira filtragem foi ditada pelo conceito de criatividade adotado, no qual a originalidade é a principal componente, ainda que não suficiente para a caraterização de um produto criativo. Outro aspeto que importa salientar é que a originalidade de cada resolução selecionada foi avaliada no universo de todas as resoluções submetidas no campeonato aos problemas considerados.

As notas e reflexões escritas do investigador serviram principalmente para descrever o que pareceram dados interessantes e ideias a explorar durante a recolha e análise de dados (Bogdan & Biklen, 1994), especialmente acerca de aspetos inesperados ou surpreendentes das resoluções dos participantes.

3.5.2. Realização de entrevistas

A entrevista é um procedimento recomendado na investigação qualitativa, cuja grande vantagem reside na obtenção imediata de informações que não são diretamente observáveis ou que não podem ser obtidas por outros métodos (Sharma, 2010; Ludke & André, 1986). É uma estratégia para conhecer as ideias e perspetivas dos participantes acerca dos fenómenos em estudo (Sharma, 2010).

A entrevista pode ser incluída num dos seguintes tipos: (1) *estruturada*, quando é composta por questões abertas e/ou fechadas pré-estabelecidas, por uma ordem fixa, com categorias prévias subjacentes e de fácil quantificação das respostas; (2) *não estruturada*, quando se carateriza por uma total flexibilidade e liberdade no desenrolar do diálogo com o entrevistado; e (3) *semiestruturada*, quando é orientada por questões planeadas mas que são adaptáveis às caraterísticas dos entrevistados e que podem evoluir na sequência da conversa (MacDonal & Headlam, 2009; Fontana & Frey, 1994). A natureza do fenómeno em estudo determina a escolha do tipo e estrutura das entrevistas (Sarma, 2010).

Neste estudo optou-se pela realização de entrevistas que cabem na tipologia de entrevistas estruturadas, dado que obedeceram a um guião composto por um conjunto de questões pré-estabelecidas e agrupadas por categorias temáticas; em todo o caso, a condução das entrevistas assumiu a possibilidade de formular novas questões suscitadas pelas respostas dos entrevistados, sempre que julgado oportuno. Este tipo de entrevista permitiu agrupar questões específicas segundo vários focos, de acordo com os propósitos do estudo.

As entrevistas constituíram o procedimento utilizado para recolher dados descritivos na linguagem dos intervenientes (Bogdan & Biklen, 1994), possibilitando captar ideias sobre a forma como estes interpretam variados aspetos inerentes ao contexto do estudo, nomeadamente no que diz respeito à manifestação da criatividade matemática na resolução de problemas. A sua preparação envolveu a construção de guiões com base num conjunto de tópicos gerais que foram seguidamente decompostos em diversas perguntas. Além disso, procurou-se dar atenção a aspetos como a duração, escolha do local da entrevista e a relação afável estabelecida com o entrevistado (Bogdan & Biklen, 1994; Fontana & Frey, 2005).

Foi selecionado um conjunto de participantes para obter dados através de entrevistas: seis alunos finalistas da edição de 2009/10 e os respetivos professores de Matemática (que correspondem a cinco professoras). A seleção dos alunos foi feita no conjunto dos finalistas oriundos da região do Algarve, pesando nesta decisão a proximidade e o acesso do investigador aos participantes, em momentos diversos, devidamente planeados de acordo com a disponibilidade dos estudantes e seus encarregados de educação, bem como dos respetivos professores. Apesar de esta seleção não contemplar as duas regiões abrangidas pelo SUB12 (Algarve e Alentejo), procurou-se assegurar que os alunos pertenciam a escolas distintas, que os professores eram diferentes (com exceção de uma das docentes entrevistadas que era professora de dois alunos finalistas) e que os selecionados tiveram classificações variadas na prova final do campeonato.

Os alunos selecionados fazem parte do conjunto dos primeiros vinte e um classificados na final do SUB12. Embora sendo uma amostra de seis alunos, obtida por conveniência, todos eles com um elevado desempenho na resolução de problemas, é de referir que as suas classificações na prova final foram distintas, pelo que estes alunos se distribuem entre o 1.º classificado e o 21.º classificado da final. A escolha das professoras a serem entrevistadas no âmbito deste estudo foi diretamente influenciada pela seleção dos respetivos alunos.

Os entrevistados foram informados e esclarecidos, desde o início, acerca dos objetivos, da estrutura e da finalidade do material a recolher através da entrevista (MacDonald & Headlam, 2009). Todas as entrevistas foram individuais, tendo sido gravadas em vídeo/áudio após concluída a final do campeonato de 2009/10. A maioria das entrevistas foi realizada no mês de julho de 2010 e as restantes em novembro do mesmo ano. Para conduzir as entrevistas, foram elaborados dois guiões, um para os alunos (ver anexo 6) e outro para os professores (ver anexo 7), qualquer deles organizado em torno de um conjunto pré-estabelecido de tópicos ou focos.

O recurso a esses focos assegurou a estruturação pretendida da informação a recolher e representou o fio condutor das entrevistas, além de guiar a codificação do material transcrito de acordo com as categorias contidas nos próprios tópicos e questões a colocar. Constituiu, assim, um instrumento para captar as perspetivas e visões dos alunos e professores sobre o campeonato SUB12, sobre a resolução de problemas e sobre a ideia de criatividade matemática e sua manifestação.

As entrevistas aos alunos e aos respetivos professores tiveram como base três tópicos gerais: 1) resolução de problemas, 2) campeonato SUB12 e 3) criatividade na resolução de problemas. No caso das entrevistas aos professores o primeiro tópico incluiu questões sobre a importância da resolução de problemas e aspetos da sua implementação pedagógica; o segundo tópico referiu-se à opinião geral sobre o SUB12, aos problemas propostos, à relação que têm com o conhecimento matemático e ao aspeto competitivo; o terceiro tópico desdobrou-se em questões relativas à originalidade das resoluções, ao papel das representações matemáticas e à relação da criatividade com o saber matemático e a capacidade de resolver problemas. Quanto aos alunos, no primeiro tópico esteve em foco a sua relação com a resolução de problemas, nomeadamente o gosto por esta atividade, bem como o conceito de aptidão para resolver problemas; os dois outros tópicos seguiram um certo paralelismo com as entrevistas aos professores. Relativamente ao tópico do campeonato SUB12, foi importante questionar os alunos sobre o que os leva a participar nessa e noutras competições matemáticas.

O local das entrevistas foi variado e escolhido de acordo com a conveniência dos entrevistados, procurando que o espaço fosse o mais agradável possível, suportado por um clima de confiança, empatia e tranquilidade, de modo a que o entrevistado se sentisse à vontade para se expressar livremente e o diálogo acontecesse com naturalidade (Bogdan e Biklen, 1994; Ludke e André, 1986).

Os contactos realizados para solicitar as entrevistas aos alunos e professoras foram realizados no mesmo dia em que decorreu a fase da final da edição 2009/10, em Junho de 2010. Foram contactados pessoalmente alguns dos sujeitos a entrevistar, quer alunos, quer professoras, logo após o conhecimento da classificação geral dos finalistas, no sentido proceder, posteriormente, à marcação das datas e locais para a realização das entrevistas. Algumas das professoras a entrevistar foram contatadas posteriormente, dado que não acompanharam os respetivos alunos no dia em que se realizou a final, na Universidade do Algarve. Nalguns casos, as entrevistas, foram efetuadas nas escolas, noutros casos realizaram-se em casa dos entrevistados. A duração média das entrevistas aos alunos foi de 35 minutos e das entrevistas às professoras foi de 45 minutos. A variação do tempo de duração teve a ver com o rumo que o diálogo tomou, em cada caso, e com o maior ou menor à vontade dos entrevistados. Logo após a realização de cada entrevista foram registadas impressões de memória por parte do investigador acerca de factos considerados pertinentes.

3.6. O processo de análise de dados

Um dos métodos de análise de dados em estudos qualitativos é a análise de conteúdo, que compreende um conjunto de técnicas direcionadas para a busca de sentido em documentos, registos de observação ou transcrições de entrevistas. Consiste numa técnica que estabelece um confronto entre o quadro teórico do investigador e o material empírico recolhido, através de dimensões interpretativas e descritivas (Guerra, 2006). No entanto, não prevê orientações objetivas e simples para o tratamento dos dados e por isso é um processo flexível, dependente das habilidades analíticas, conhecimentos e habilidade do investigador, o qual deve adotar as estratégias mais adequadas ao seu problema de investigação, o que torna o processo de análise mais desafiante e interessante (Elo & Kingas, 2007).

A análise de conteúdo é um método de análise de dados suportado por procedimentos objetivos e sistemáticos da descrição do conteúdo com a intenção de determinar a presença de determinadas expressões ou conceitos no discurso dos participantes e em documentos por estes produzidos. Através dela, o investigador pode interpretar o significado dos conceitos e das relações entre eles, fazendo inferências que permitam a passagem explícita à interpretação a partir da descrição dos dados (Bardin, 2002). Geralmente baseia-se em codificações sistemáticas que ajudam a compreender os significados dos fenómenos, para além do significado do senso comum (Moraes, 1999).

A análise de conteúdo qualitativo pode incidir sobre todo o tipo de registos, como por exemplo, cartas, jornais, transcrições de entrevistas, protocolos de observações, registos de vídeo, etc. (Mayring, 2000). Logo, os dados provêm da comunicação verbal e não-verbal, através de fontes diversificadas e chegam ao investigador em estado bruto, para serem processadas de modo a facilitar o trabalho de compreensão, interpretação e inferência (Moraes, 1999). Não é obrigatório o contacto entre o investigador e os participantes, a informação pode ser obtida apenas em documentos por eles ou através deles produzidos (Vasconcelos, 2010). Foi esta a situação que ocorreu neste estudo em relação à análise documental das resoluções dos participantes nas três edições do campeonato SUB12.

A descodificação de um documento depende dos objetivos de investigação e do ponto de vista do investigador (Mozzato & Grzybovski, 2011). A descodificação das resoluções selecionadas teve como ponto de vista subjacente a premissa de que a criatividade matemática não é um exclusivo dos alunos talentosos mas pode ser detetada em qualquer aluno se for devidamente cultivada. Daí que uma das razões para preferir as produções dos alunos na fase de apuramento seja o facto esta fase do campeonato se mostrar mais favorável e estimulante ao surgimento da criatividade matemática. Por outro lado, o ponto de vista teórico adotado para analisar o conteúdo dessas resoluções, em termos de criatividade matemática, tem a sua raiz no conceito tradicional de criatividade (que envolve as dimensões de originalidade, fluência e flexibilidade) embora transposto para o domínio da resolução de problemas de Matemática.

Em suma, a análise de conteúdo conduz à definição de categorias de análise com base num certo grau de intuição, imaginação e criatividade, não descurando os fatores éticos e de rigor (Silva & Fossá, 2013; Mozzato & Grzybovski, 2011). O processo de análise permite ao investigador a definição e classificação das unidades de sentido e o desvendar de novos significados, por vezes, inesperados (Oliveira, Ens, Andrade & Mussis, 2003).

Existem vários modelos de análise de conteúdo, entre os quais a análise temática que será adotada neste estudo, porque além de ser simples é aconselhada para investigações qualitativas. O seu desenvolvimento pressupõe pelo menos três etapas (Bardin, 2002). Na primeira, é efetuada a *Pré-análise* que consiste no desenvolvimento de um conjunto de ações necessárias para realizar a análise propriamente dita. Envolve a definição do *corpus* de análise (escolha e organização de documentos), a formulação dos objetivos da análise e a elaboração dos indicadores que suportam a interpretação final.

No presente estudo, a análise das resoluções é suportada pela aplicação de um referencial especificamente construído para esta investigação, composto por diversos indicadores e descritores da criatividade matemática, o qual se apresenta na subsecção seguinte. Esta fase compreende, também, a leitura geral do material de análise selecionado que, no caso das entrevistas, já deverão estar transcritas e organizadas.

A tarefa de interpretar o conteúdo dos documentos recolhidos, de forma elaborada e detalhada, é feita na fase seguinte. Essa fase é marcada pela *exploração do material*, que consiste na transformação sistemática dos dados brutos para permitir a descrição de evidências pertinentes. Nesta etapa, são realizadas as operações de codificação, considerando unidades de registo (podem ser parágrafos de entrevistas, textos ou aspetos de um documento ou imagem), definindo regras de contagem, bem como a classificação e agregação das informações em categorias simbólicas ou temáticas. É uma etapa importante por ser marcada pela descrição analítica do *corpus*, orientada pelas questões de investigação e pelo referencial teórico. Logo, a codificação, a classificação e a categorização são tarefas básicas desta etapa.

A terceira, e última, etapa corresponde à *inferência e interpretação*, onde são destacadas as informações obtidas da análise, podendo ser apresentadas em diagramas, figuras, tabelas, quadros, etc. (Ludke & André, 1986). Esta etapa compreende a interpretação dos resultados captados em todo o material recolhido, sendo a análise comparativa realizada por justaposição das diversas categorias, fazendo ressaltar os aspetos semelhantes e diferentes (Silva & Fossá, 2013). É o momento da intuição e da análise reflexiva (Mozzato & Grzybovski, 2011). Este tipo de análise comparativa foi importante neste estudo para permitir, no conjunto de resoluções de cada problema, identificar a heterogeneidade que a criatividade matemática evidencia e, ao mesmo tempo, as tendências comuns.

A análise de dados foi primordialmente interpretativa e a sua apresentação essencialmente descritiva, centrada nos documentos digitais produzidos pelos participantes (resoluções dos alunos no campeonato), nas notas escritas do investigador e nas transcrições das entrevistas efetuadas, com vista a uma caraterização multifacetada do fenómeno em investigação e a uma compreensão sistémica do mesmo face às questões de investigação.

O intuito não foi estabelecer relações de causa e efeito, mas compreender o fenómeno da criatividade matemática numa perspetiva suportada pelos conceitos teóricos orientadores do estudo. Atendendo à natureza interpretativa desta investigação, a metodologia foi delineada no sentido de descrever e interpretar o fenómeno da criatividade matemática no contexto de uma competição matemática de resolução de problemas, de forma tão completa e autêntica quanto possível. Procurou-se tornar os dados percetíveis, tal como as interpretações que foram feitas, assim como os processos de tratamento utilizados, no sentido de permitir ajuizar da sua fidedignidade e, mais geralmente, da sua credibilidade (Ponte, 2006).

A análise e a interpretação incidiram sobre uma diversidade de dados empíricos, em articulação com o enquadramento teórico desenvolvido. Tenderam a seguir um processo indutivo e foram acompanhadas de uma constante revisão do campo conceptual, no sentido de dar suporte às evidências encontradas.

3.6.1. O referencial de análise da criatividade das resoluções

Ainda que o presente estudo se apoie no modelo psicométrico que está na base dos testes de criatividade, pretende-se sobretudo caraterizar a criatividade dos produtos resultantes da resolução de problemas por alunos que participaram nas fases de apuramento do campeonato de matemática SUB12, edições 2010/2011, 2011/2012 e 2012/2013, recorrendo para tal à construção e aplicação de um referencial de análise da criatividade matemática na resolução de problemas. Afasta-se, portanto, o foco da pessoa criativa para o aproximarmos do produto criativo, adotando um referencial que permita examinar e interpretar caraterísticas dos produtos e que informem acerca da sua qualidade e variabilidade criativa. Trata-se, acima de tudo, de propor uma ferramenta de análise, de a aplicar reiteradamente em respostas a diferentes problemas e de examinar, com essa lente amplificadora, as soluções propostas pelos jovens participantes.

Admitimos que as respostas selecionadas refletem a diversidade do pensamento matemático dos jovens envolvidos e oferecem indícios de uma criatividade que é relativa ao contexto inclusivo em que esta emerge, por se ajustar à medida das suas capacidades, competências, conhecimentos e perspicácia. O propósito não é o da procura de talentos matemáticos excecionais ou de jovens especialmente dotados; visamos, pelo contrário, a criatividade do Mini-c, a criatividade dos pequenos sucessos de alunos que resolvem problemas matemáticos de formas interessantes.

A avaliação de produtos criativos tem paralelo na avaliação do pensamento divergente, cujas primeiras pesquisas, desenvolvidas por Guildford, identificaram componentes do pensamento divergente que foram rapidamente apreendidos para a avaliação da criatividade (Clary, Brzuszek & Fulford, 2011). Em particular, de entre as categorias reconhecidas por Guilford, os conceitos de flexibilidade, fluência e originalidade são comummente usados na construção de ferramentas para avaliar o desempenho e potencial criativo dos alunos (Mann, 2005).

São escassas, ou inexistentes, as referências a instrumentos para analisar a criatividade em contextos para além da sala de aula, como é o caso do SUB12, onde são propostos problemas matemáticos desafiadores passíveis de várias formas de resolução.

É necessário, portanto, um método para proceder à análise da criatividade manifestada na resolução de problemas desta natureza e no contexto onde esta surge. São vários os autores que defendem que as produções obtidas na resolução de problemas podem ser analisadas tendo em conta três dimensões da criatividade: originalidade, flexibilidade e fluência (Leikin 2009b; Mann, 2006; Pinheiro & Vale, 2013).

Sendo certamente um desafio, neste estudo pretende-se encontrar um instrumento viável que possibilite obter indicadores acerca da criatividade matemática presente nas resoluções dos participantes no campeonato de resolução de problemas SUB12.

O referencial de análise aqui proposto, inicialmente inspirado no trabalho de Guerra (2007), foi alterado, adaptado e ajustado ao caso em estudo, visando detetar evidências da criatividade na resolução de problemas, em contexto extraescolar, no âmbito de uma competição matemática inclusiva e baseada na Internet.

No referencial construído, o conhecimento é estabelecido como um pano de fundo relevante, sendo de sublinhar que se trata do conhecimento matemático e da experiência de resolução de problemas matemáticos que são esperados ou antecipados em jovens com um grau de preparação matemática consonante com o seu percurso escolar e enformada pelo currículo escolar a que são expostos. Não são negligenciados, contudo, capacidades e conhecimentos informais, formas de pensar e de comunicar próprias, processos de construção de sentido e o desenvolvimento de modelos conceptuais decorrentes da própria atividade de compreensão, análise e procura de solução para um problema.

Neste estudo, a criatividade matemática é considerada em relação com a atividade de resolução de problemas de Matemática e traduz-se, em larga medida, pela originalidade de resoluções únicas, quando comparadas com as demais num determinado grupo alvo. De acordo com o referencial de análise proposto, descrever e caraterizar a criatividade matemática, no contexto do SUB12, significa analisar a originalidade, em primeiro lugar, mas também o conhecimento matemático envolvido e as representações usadas no processo de resolução.

Como já foi referido, os problemas propostos no campeonato podem ser resolvidos de maneiras diversas e não exigem a aplicação de conteúdos curriculares específicos, dando oportunidade e liberdade aos jovens de encontrar o seu próprio processo de resolução e inclusive de inventar estratégias próprias. Desta forma, olharemos para a dimensão da fluência em termos da utilização de conceitos, procedimentos e resultados matemáticos e, ainda, da capacidade de estruturar de forma coerente diversas etapas de resolução do problema. Diremos, portanto, que a fluência está relacionada com o pensar matematicamente sobre a situação ou desafio colocado.

No que se refere à flexibilidade, consideraremos que se prende com a forma de exprimir e representar o pensamento matemático, associando-a ao uso flexível de representações como um dos elementos relevantes para veicular aspetos do raciocínio utilizado, da escolha da estratégia e da sua comunicação e expressão. Argumentamos que a flexibilidade se manifesta através da capacidade dos participantes no SUB12 de selecionarem representações adequadas para resolver os problemas propostos (Nistal, Dooren, Clarebout, Helen & Verschaffel, 2009). Claro está que o termo flexibilidade representacional supõe que o mesmo conceito matemático pode ser visto de diferentes perspetivas e representado de formas distintas. Sendo assim, a noção de flexibilidade representacional significa também que as representações são formas de externalização do pensamento e raciocínio dos participantes ao resolverem os problemas propostos (Andresen, 2007).

Em suma, o conceito de criatividade será operacionalizado pela conjugação das componentes Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional, num sistema integrado e dinâmico, em que o primeiro traço tem um peso decisivo para que uma resolução seja considerada criativa. Assim, a originalidade refere-se à singularidade das resoluções; a fluência consiste no conhecimento matemático necessário e apropriado que é mobilizado para resolver cada problema; e a flexibilidade refere-se às formas de representação adequadas para exprimir o conhecimento envolvido em cada situação.

Com esta perspetiva, o instrumento proposto para analisar a criatividade matemática das resoluções contém três secções – Conhecimento, Indicadores e Descritores (figura1). O conhecimento refere-se ao domínio da resolução de problemas de Matemática e engloba conteúdos matemáticos, estratégias, formas de raciocínio matemático, linguagem matemática e simbólica, procedimentos e cálculo, de acordo com a experiência e maturidade dos alunos envolvidos.

A partir do conhecimento surgem três indicadores codificados:

- a *originalidade (O)* que está relacionada com a capacidade de gerar resoluções próprias e singulares, dentro da amostra estabelecida, tendo naturalmente em conta o contexto e o nível de desenvolvimento que é alcançável pelos participantes. Isto é, a originalidade consiste na habilidade de produzir ideias incomuns, para resolver problemas de maneiras invulgares (Gomez, 2007; Sriraman, 2008);

- *a fluência (Fn)* que reflete a capacidade de usar conhecimento matemático de forma clara e eficaz para construir estratégias, encadear raciocínios e executar operações e procedimentos e comunicar as resoluções dos problemas, de forma clara, objetiva e precisa. O pensamento criativo está portanto relacionado com a fluência e precisão matemática, especialmente em tarefas não rotineiras e novas (Aizikovitsh-Udi, 2013).
- a *flexibilidade (Fx)* que diz respeito à flexibilidade representacional e está associada à capacidade de selecionar, combinar, usar e adaptar representações, de acordo com as caraterísticas dos problemas a resolver, permitindo reconhecer e inferir os raciocínios usados pelos participantes e perceber a diversidade de meios que estes encontram para produzir soluções e, em particular, a capacidade para registar informação e condensar ideias, bem como para as interrelacionar.

Domínio de conhecimento	**Indicadores (Código)**	**Descritores (Códigos)**
Resolução de problemas matemáticos	Originalidade (N)	Novidade (N) 1. resolução eficaz e invulgar (N1) 2. recorre a ideias significativas e incomuns (N2) 3. estratégia adequada e singular (N3) 4. raciocínio claro e invulgar (N4) 5. comunicação objetiva e distinta (N5)
	Fluência/Proficiência (Fn)	Conhecimento matemático (C) 1. o conhecimento matemático é mobilizado apropriadamente (C1) 2. o conhecimento matemático está em sintonia com os dados e condições do problema (C2) 3. o conhecimento matemático é executado com perspicácia e eficiência (C3) 4. o conhecimento matemático processual é aplicado de forma simples e eficaz (C4) 5. o conhecimento matemático conceptual é expresso através de métodos próprios (C5) 6. o conhecimento matemático reflete a compreensão do problema (C6) 7. o conhecimento matemático é estruturado por etapas organizadas estrategicamente (C7)
	Flexibilidade (Fx)	Representações (R) 1. utiliza representações adequadas (R1) 2. as representações traduzem a ligação clara do conhecimento matemático com os dados (R2) 3. recorre a diferentes sistemas de representação interligados eficazmente (R3) 4. constrói representações próprias pertinentes (R4) 5. recorre a representações estratégicas com eficácia (R5) 6. as representações refletem o processo de raciocínio utilizado explicitamente (R6) 7. as representações permitem uma comunicação nítida e perspicaz (R7)

Figura 1 - Referencial de Análise das Resoluções

Por sua vez, cada indicador é associado a uma chave de codificação – *Novidade (N), Conhecimento matemático (C) e Representação (R)* – que é usada para designar o conjunto de descritores (N1, ..., N5; C1, ..., C7; R1, ..., R7) definidos para identificar da forma mais fina e específica, os elementos de criatividade em cada resolução.

Esta ferramenta de análise foi sujeita a várias alterações, desde a fase embrionária da sua conceção até ao seu estado atual, mantendo-se, no entanto, as dimensões da

Originalidade, *Flexibilidade* e *Fluência*, consideradas estruturantes de acordo com a noção de criatividade que é adotada no estudo.

Ao longo da sua metamorfose, o referencial de análise foi testado gradualmente em diferentes momentos. Num primeiro momento, foi aplicado a um conjunto de resoluções relacionadas com um problema de umas das fases de apuramento, cujo resultado foi publicado nas atas do encontro Internacional ICME[4] 2012, realizado em Seul, na Coreia do Sul. Neste exercício de pilotagem, emergiram dúvidas e propostas que induziram ao seu refinamento, revisão e aperfeiçoamento, bem como a novas reflexões no seio do campo teórico. Posteriormente, foi testado em duas amostras de dados diferentes, relativas a dois problemas, e ensaiadas duas abordagens distintas: uma delas procurando uma leitura da criatividade matemática, caso a caso, isto é, resolução a resolução; e outra, fazendo um escrutínio transversal sobre as dimensões contidas no referencial num conjunto de resoluções. As sucessivas análises assim obtidas revelaram fortes níveis de convergência, mostrando, ao mesmo tempo, que as análises subsequentes validavam e ampliavam os resultados das análises anteriores, suscitando a convicção da utilidade e credibilidade do instrumento orientador da análise de conteúdo efetuada. Neste segundo momento, o resultado da aplicação do referencial de análise deu origem à apresentação de uma *Keynote*, no âmbito da Conferência Internacional Problem@Web, realizada em Vilamoura, no Algarve, em 2014.

Em suma, o referencial de análise aqui proposto foi concebido no sentido de constituir uma ferramenta capaz de detetar evidências da criatividade, da forma mais consistente possível, no contexto específico do SUB12, estando aberto a novas reformulações e eventuais melhoramentos, incluindo a possibilidade de adicionar novos descritores e recursos, em função dos resultados de futuras investigações. Esta perspetiva de constante evolução de um instrumento de análise é entendida como inerente ao processo de investigação de um fenómeno complexo e teoricamente denso, como é o da criatividade matemática no contexto de uma competição de resolução de problemas. Assim, com esta ferramenta pretende-se propor uma via de descrição e caraterização das respostas dos alunos, com o intuito de revelar a criatividade matemática manifestada nessas respostas.

[4] Internacional Congress on Mathematical Education

3.6.2. A operacionalização do referencial de análise

Das 50 resoluções que constituem a amostra selecionada para análise, 25 pertencem a alunos do 5.º ano e outras 25 pertencem a alunos do 6.º ano. Pretendeu-se que o nível de escolaridade não representasse um fator de assimetria uma vez que se poderá pensar que os alunos do 6.º ano de escolaridade terão mais conhecimento ou mais experiência ou maturidade do que os seus colegas do 5.º ano.

O referencial de análise foi usado para detetar evidências da criatividade matemática nas resoluções selecionadas, funcionando como um roteiro para identificar a presença (em maior ou menor grau) ou a ausência dos descritores das três dimensões da criatividade em cada uma delas.

Com o objetivo de designar as resoluções da amostra, foi-lhes atribuído um código alfanumérico constituído por duas letras e dois números: a letra S indica solução; as letras A, B e C identificam cada uma das três edições do campeonato, respetivamente 2012/13, 2011/12, 2010/11; o primeiro número reflete a ordem de cada resolução no conjunto de 10 resoluções para um mesmo problema; o último número identifica o problema na respetiva edição do campeonato SUB12. Assim, por exemplo, a solução S4B9 corresponde à solução com o número 4 no conjunto das soluções escolhidas para o problema 9 da edição 2011/12 do campeonato.

Para permitir uma imagem mais nítida e concisa da codificação das resoluções, foram compilados os descritores da criatividade matemática em cada conjunto de dez resoluções de cada problema, com recurso à tabela 1. Esta tabela constituiu um meio de registo e organização dos dados relativos a cada um dos problemas considerados, à luz dos dezanove descritores utilizados para descrever a criatividade matemática.

Problema ? - Edição ? (Fase Apuramento)																			
Indicadores	Originalidade (O)					Fluência/Proficiência (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Novidade (O)					Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	N1	N2	N3	N4	N5	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1??	+	+	-	0	-														
S2??	-	-	0	+	0														
S3??																			
S4??																			
S5??																			
S6??																			
S7??																			
S8??																			
S9??																			
S10??																			

Tabela 1 - Registo dos descritores incluídos no referencial de análise.

Uma vez que a análise será efetuada com base na confrontação e comparação das resoluções no seio da amostra, recorreu-se aos símbolos + (mais), - (menos) e 0 (zero), para registar uma maior ou menor presença dos descritores ou a sua total ausência nas soluções examinadas. O uso dos símbolos matemáticos + (mais) e – (menos) significa uma maior ou menor evidência dos descritores em cada resolução, em resultado da comparação feita, não só universo da amostra, mas também no conjunto de todas resoluções para o mesmo problema que foram enviadas para o SUB12.

Para cada resolução, o referencial será usado, em primeiro lugar, para detetar evidências da originalidade e, depois, de forma interligada, para identificar pistas sobre a fluência e flexibilidade, descrevendo-se resumidamente a forma como foi determinada a codificação com base nos descritores.

Após a descrição de cada conjunto de dez resoluções é feita uma síntese comparativa dessas resoluções, recorrendo a um esquema gráfico tridimensional (figura 2), representativo dos indicadores Originalidade (O), Fluência do Conhecimento Matemático (Fn) e Flexibilidade Representacional (Fx).

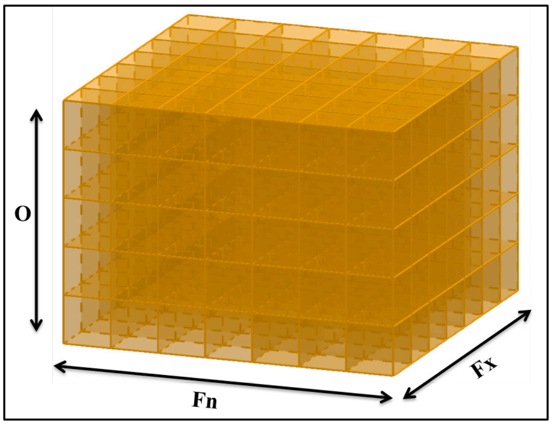


Figura 2 – Gráfico Tridimensional

Em cada resolução, a variabilidade dos indicadores representados em cada um dos três eixos do gráfico será resultante da atribuição dos valores numéricos 1, 1/2 e 0 aos símbolos mais (+), menos (-) e zero (0), respetivamente.

No final da análise de cada conjunto de dez resoluções é feita uma súmula das evidências de criatividade matemática que emerge das tabelas de descritores codificados e dos gráficos tridimensionais construídos.

3.6.3. A análise das entrevistas

Os guiões das entrevistas (aos alunos e aos professores) assumem um papel estruturante na organização e análise dos dados recolhidos. Os dados gravados e posteriormente transcritos são de natureza qualitativa e a sua análise de natureza descritiva; essa análise será efetuada através de tabelas onde se regista de forma condensada o que cada entrevistado respondeu para cada questão. Esta redução dos dados das entrevistas aos alunos e às respetivas professoras será ainda complementada com a apresentação de excertos das declarações dos entrevistados, conservando e respeitando as falas e a linguagem dos participantes, nas suas respostas às questões colocadas.

Serão tratados separadamente os dois conjuntos de entrevistas, começando pelas entrevistas aos alunos e passando de seguida às entrevistas com as professoras. A análise de cada conjunto de entrevistas será finalizada com uma síntese que envolve a interpretação dos resultados mais relevantes e interessantes, tendo em conta os objetivos e questões de investigação.

As categorias de análise dos dados emergem das questões formuladas no guião e da sua interação com o conteúdo dos depoimentos dos entrevistados. Assim, por exemplo, o significado que os alunos atribuem à atividade de resolução de problemas de Matemática é descrito em termos de palavras-chave, que estes foram convidados a escolher, de entre as opções: "confusão", "inteligência", "ideias brilhantes", "adrenalina". A interpretação das respostas a esta questão será informada pela discussão teórica feita atrás em torno da associação entre resolução de problemas e criatividade (designadamente, tendo por base a ideia de iluminação), entre resolução de problemas e talento matemático e entre resolução de problemas e o interesse por desafios, gosto por correr riscos e por enfrentar o desconhecido, que são considerados usuais nos indivíduos criativos.

No sentido de manter o anonimato dos participantes, foi atribuído um código alfanumérico a cada um dos seis alunos (A1, A2, A3, A4, A5 e A6) e das cinco professoras (P1, P2, P3, P4, e P5), que os identificará ao longo da descrição e análise de dados das entrevistas. Outros nomes que surgem ao longo da análise dos dados referem-se a alunos não participantes neste estudo e são nomes fictícios, com o intuito de manter o seu anonimato.

É importante referir que as alunas finalistas A1 e A2 (12.ª e 21.ª classificadas na final do SUB12) são alunas da professora P1; o aluno finalista A3 (8.º classificado) é aluno da professora P2; o aluno finalista A4 (2.º classificado) é aluno da professora P3; o aluno finalista A5 é aluno da professora P4 (1.º classificado); e o finalista A6 (10.º classificado) é aluno da professora P5. Note-se ainda que as opiniões e declarações emitidas pela professora P2, relativamente a questões específicas acerca do SUB12, foram baseadas no seu conhecimento das edições de anos anteriores, dado que durante esta edição não teve tempo para acompanhar os seus alunos na dinâmica do campeonato, uma vez que exerceu funções específicas e bastante absorventes na implementação do Programa de Matemática, então em fase de generalização.

À data da construção e aplicação dos guiões das entrevistas, estava em vigor o Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 28 de dezembro de 2007. Nesse programa, eram explicitamente definidas como parte integrante das aprendizagens dos alunos as capacidades transversais de Resolução de Problemas, Raciocínio Matemático e Comunicação Matemática. O Plano da Matemática, definido a nível nacional para apoiar a implementação do programa, contemplava, em muitos casos, a possibilidade de capitalizar os tempos letivos de Área de Projeto e de Estudo Acompanhado para trabalhar as competências transversais preconizadas, nomeadamente a resolução de problemas, quer no âmbito curricular, quer através de atividades extracurriculares, de que é exemplo o SUB12.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Introdução

Este capítulo contém os resultados da análise dos dados e apresenta o essencial do processo analítico que visa descrever e compreender em profundidade a criatividade matemática na resolução de problemas, do ponto de vista dos produtos criativos dos alunos e das perceções que um conjunto de jovens e seus professores demonstram sobre a criatividade no contexto da competição matemática SUB12 – o caso em estudo.

Encontra-se organizado em duas secções; a primeira é dedicada à análise das resoluções selecionadas, referentes a cinco problemas do SUB12, mediante a aplicação e operacionalização do referencial de análise da criatividade matemática; a segunda expõe a análise das entrevistas efetuadas a seis alunos finalistas do campeonato e cinco professoras, segundo os vários focos que estruturaram a condução das entrevistas: a relação com a resolução de problemas (dos alunos), a importância pedagógica da resolução de problemas (para as professoras), o interesse do SUB12 e a Matemática numa vertente competitiva, a originalidade na resolução de problemas, a representação na resolução de problemas, o raciocínio na resolução de problemas, a aptidão de resolução de problemas.

4.2. Resultados da análise da criatividade matemática das resoluções

Ao longo desta primeira secção, será apresentada a análise das 50 resoluções, selecionadas, correspondentes a 5 grupos de 10 resoluções, cada um dos quais relativo a um problema proposto no SUB12, designadamente nas edições 2012/13 (problemas 7 e 10), 2011/12 (problemas 9 e 10) e 2010/11 (problema 10).

4.2.1. Resoluções do problema 10 da edição 2012/13

Resolver o problema "Pequeno-almoço no hotel" (figura 3), implica uma estratégia que permita interpretar os dados do enunciado e com eles extrair informação que não está imediatamente visível.

Problema 10: Pequeno almoço no hotel

No hotel Pacífico estiveram 63 pessoas no buffet do pequeno almoço.

Ao todo, houve 37 pessoas que se serviram de sumo e 52 pessoas que se serviram de café. Sabendo que apenas 6 pessoas não beberam sumo nem café porque preferiam chá, quantas pessoas beberam sumo e também café?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 3 - Problema 10, edição 2012/13.

Um passo decisivo rumo à solução é a verificação de que o conjunto de pessoas que beberam sumo e o conjunto de pessoas que beberam café não são disjuntos. Uma possibilidade de abordar a situação é retirar ao total de pessoas o número de pessoas que apenas teriam bebido chá. Deste modo fica calculado o número de pessoas que bebeu pelo menos uma das duas bebidas: sumo ou café. A partir daqui poderia optar-se, pelo menos, por duas vias para obter a resposta correta. A primeira via consistia em adicionar o número de pessoas que tinham bebido sumo com o número de pessoas que tinha bebido café, para de seguida subtrair à soma obtida o valor obtido anteriormente. A diferença corresponde ao número de pessoas que optaram pelas duas bebidas. A segunda via passava por calcular a diferença entre o número de pessoas que se tinham servido de pelo menos uma das bebidas e as que tinham bebido café para identificar o número de pessoas que apenas tinha ingerido essa bebida. Posteriormente, calculando a diferença entre número de pessoas que beberam sumo (pelo menos) e o número de pessoas que apenas tinha bebido café obtém-se a resposta à questão levantada no enunciado do problema.

Seguidamente, será feita a descrição dos resultados da análise deste conjunto de resoluções. Os resultados referentes aos indicadores Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional serão descritos organizadamente em quatro grupos. Cada grupo foi distinguido pelo tipo de representações utilizadas em cada um, considerando aspetos distintos e comuns presentes nas estratégias seguidas e nos raciocínios efetuados que permitiram resolver o problema com sucesso.

Análise das resoluções S1A10, S2A10 e S3A10

As três resoluções (Anexo 1) são marcadas pelo recurso a diagramas de *Venn*. Enquanto que as representações gráficas foram usadas como suporte dos raciocínios manifestados nas resoluções S1A10 e S3A10, revelando-se elementos fundamentais das estratégias escolhidas para suportar os processos de raciocínio, na resolução S2A10 o digrama foi utilizado apenas para confirmar todo o processo seguido.

Evidências de Originalidade

Ainda que se note uma grande convergência e proximidade entre as ideias ou conceitos presentes neste conjunto (N2-) e que o mesmo tenha levado, aparentemente, a processos de raciocínios semelhantes (N4-), as estratégias usadas, para além de serem adequadas, são distintas umas das outras (N3+) e, por sua vez, conduziram a resoluções invulgares e eficazes (N1+). Em particular, o modo distinto que foi usado para comunicar cada uma das resoluções, com maior objetividade nas resoluções S1A10 e S3A10 (N5+) do que na solução S2A10 (N5-), é revelador da importância atribuída aos diagramas de *Venn*, como componente integrante das estratégias executadas e pela forma como foram explorados para obter a solução em cada caso.

Na resolução S1A10, o processo é iniciado subtraindo ao número total de pessoas as que beberam apenas chá, para posteriormente e estrategicamente, relacionar a diferença obtida com os restantes dados do enunciado num diagrama de *Venn* e, assim, resolver o problema. Perante a resolução S2A10, poderá dizer-se que o diagrama de *Venn* foi utilizado de uma forma própria, mas essencialmente como meio de ilustrar e validar todo o processo de resolução. Face à resolução S3A10, verifica-se que o diagrama de *Venn* foi operacionalizado de forma peculiar e personalizada, revelando-se uma opção estratégica para suportar integralmente todo o processo de raciocínio que levou à obtenção da solução correta do problema.

Em jeito de síntese, a tabela 2 reflete o registo codificado dos descritores detetados nas resoluções S1A10, S2A10 e S3A10 (representadas por cada uma das linhas da tabela), para caraterizar a dimensão da originalidade, que contempla os descritores N1, N2, N3, N4 e N5.

Indicador	Originalidade (O)				
Descritores	Novidade (N)				
	N1	N2	N3	N4	N5
S1A10	+	-	+	-	+
S2A10	+	-	+	-	-
S3A10	+	-	+	-	+

Tabela 2 - Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Nas três resoluções, as evidências de Fluência e Flexibilidade garantiram visivelmente o uso apropriado de conhecimento matemático (C1+) e a sua representação devidamente adequada (R1+), sendo que as representações usadas revelam uma forte conexão com os dados e condições indicados no enunciado (C2+), com maior clareza nas resoluções S1A10 e S3A10 (R2+) do que na resolução S2A10 (R2-), refletindo, desta forma, a compreensão integral do problema (C6+).

Perante as resoluções S1A10 e S3A10, sobressai a mobilização eficiente e perspicaz de conceitos matemáticos (C3+) e a aplicação eficiente dos procedimentos implicados, designadamente o encadeamento de cálculos (C4+). Nas resoluções, a consistência das estratégias escolhidas é transmitida através da utilização de linguagem icónica e linguagem simbólica devidamente interligadas por linguagem natural (R3+). Além disso, o conjunto das representações eleitas possibilitou formas claras de comunicar cada resolução, com maior perspicácia e organização nas resoluções S1A10 e S3A10 (R7+) do que na solução S2A10 (R7-). Cada modo de raciocinar é explicitamente representado (R6+) em diferentes etapas de resolução, com melhor organização estratégica na resolução S1A10 (C7+) dos que na soluções S2A10 e S3A10 (C7-).

Na resolução S1A10, as etapas de resolução são expressamente marcadas pelo: (a) registo esquemático dos dados retirados no enunciado e pela operação aritmética que possibilitou subtrair o número de pessoas que apenas se serviram de chá; (b) execução da estratégia escolhida operacionalizada estrategicamente num diagrama de *Venn* (R5+), que se revelou fundamental para relacionar os dados do enunciado combinados com as operações aritméticas e, deste modo, calcular o número de pessoas que se serviram de café e de sumo; (c) e pelo registo da resposta. A solução S3A10 não é tão óbvia nas diferentes etapas de resolução que a constituíram. A primeira etapa é marcada pela definição da estratégia usada que consistiu na representação da relação estabelecida entre os dados do problema num diagrama de *Venn,* através de representações próprias pertinentes (R4+), na forma de *smiles* coloridos e legendados. Esta forma de representar e relacionar os dados resultou num todo representacional integrado, que se revelou estratégico e eficaz (R5+) para calcular o número de pessoas que beberam sumo e café. Na segunda etapa, é explicada relação dos dados expressa através dos *smiles* representados no diagrama de *Venn*, recorrendo a linguagem numérica conectada com linguagem verbal. E na última e terceira etapa, é revisto todo o processo de raciocínio recorrendo à operação de subtração para validar a solução.

Na resolução S2A10, é mais difícil identificar as diferentes etapas de resolução devido à forma como foram representadas (C7-). De acordo com a apresentação da solução vamos considerar duas etapas. A primeira etapa é iniciada subtraindo ao total o número de pessoas que apenas beberam chá (nem café nem sumo). Posteriormente, foram adicionados os números correspondentes às pessoas que beberam café e sumo, para de seguida recorrer à operação subtração para calcular o número de pessoas que se serviram de ambas as bebidas e, desta forma, solucionar o problema. Neste processo, denota-se uma certa falta de sintonia entre as representações verbais e simbólicas usadas que limita a nitidez e perspicácia da comunicação da resolução (R7-), com reflexos, particularmente, ao nível do rigor matemático (R3-) e na compreensão imediata do raciocínio construído (R6+). Por exemplo, a ligação entre interseção de conjuntos e a realização da subtração não é totalmente explicitada pelo aluno. Portanto, embora o conhecimento matemático se tenha revelado eficiente não foi aplicado de forma inequívoca (C3-), particularmente no que diz respeito aos processos efetuados (C4+), facto que obriga o leitor a um esforço acrescido de entendimento. A última etapa é caraterizada pela validação de todo o processo de resolução, recorrendo a uma representação gráfica composta por um diagrama de *Venn*, no qual os dados do problema foram relacionados e registados a partir de representações próprias pertinentes (R4+). A representação gráfica não foi considerada estratégica (R5-), por não ter assumido a centralidade em todo o processo de resolução, mas aparentar ser antes uma forma de o confirmar.

A tabela 3 traduz a relação da Fluência do Conhecimento Matemático com a Flexibilidade Representacional analisadas nas resoluções S1A10, S2A10 e S3A10, através dos descritores codificados provenientes do referencial de análise proposto.

Indicadores	Fluência (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1A10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	**0**	+	+	+
S2A10	+	+	-	+	**0**	+	-	+	-	-	+	-	+	-
S3A10	+	+	+	+	**0**	+	-	+	+	+	+	+	+	+

Tabela 3 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Análise das resoluções S4A10, S5A10 e S6A10

Os produtos resultantes das três resoluções seguintes (Anexo 1) denotam o recurso a tabelas para registar, organizar e relacionar os dados mais importantes retirados do enunciado para resolver o problema em questão.

Evidências de Originalidade

No que se refere à originalidade, considera-se resoluções invulgares (N1+), distintas pela forma como foram desenvolvidas e estruturadas eficazmente em cada caso.

Da análise da resolução S4A10, salienta-se uma estratégia de resolução adequada e única (N3+), marcada por uma ideia com significado e incomum (N2+), que consiste em registar estrategicamente os dados numa tabela de contingência, para posteriormente completar as células da tabela e assim resolver o problema. O processo de preenchimento da tabela é explicado de forma sucinta mas entende-se que os valores parciais e os totais disponíveis no enunciado foram suficientes para permitir a determinação dos restantes valores que a tabela contempla (N5+), tornando-se portanto bastante nítido o raciocínio invulgar baseado na ideia de usar as duas variáveis sumo e café e as respetivas negações (não sumo e não café) (N4+).

Em resultado da análise comparativa, na resolução S5A10 verifica-se que a ideia (N2-) implícita no processo de resolução (N3-) e a estratégia que lhe deu significado são singulares quando comparadas com as restantes resoluções da amostra, mas perdem destaque quando a solução é confrontada com a totalidade das resoluções enviadas para o SUB12, uma vez que existem várias outras convergentes com a mesma ideia. A ideia associada à estratégia de resolução assenta na divisão estratégica da unidade em 63 partes, por via de uma tabela ou esquema tabular, através da qual foram representados os dados mais importantes, recorrendo-se estrategicamente a cores e à palavra café, para solucionar o problema mediante um sistema que envolve contagem e tentativa e erro. A clareza e objetividade distinguem um tipo de comunicação (N5+) revelador de um processo de raciocínio que não levanta dúvidas, mas que não é de todo único, por apresentar aspetos comuns a outros manifestados dentro da amostra selecionada (N4-).

A singularidade da resolução S6A10 é marcada pela apresentação de duas resoluções, onde a ideia de base (N2-) e a estratégia (N3-) utilizadas se confundem com outras no seio da amostra. A diferença é sustentada pela forma distinta, clara e objetiva de comunicar (N5+) um processo de raciocínio com pontos comuns a outros verificados no universo da amostra (N4-)

Na tabela 4 observa-se a codificação atribuída aos descritores definidos para o indicador Originalidade detetados nas resoluções S4A10, S5A10 e S6A10.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S4A10	+	+	+	+	+
S5A10	+	-	-	-	+
S6A10	+	-	-	-	+

Tabela 4 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Ao nível da Fluência e da Flexibilidade, a representação adequada (R1+) do conhecimento matemático que é mobilizado apropriadamente (C1+) nas três resoluções, não deixa dúvidas quanto à compreensão do problema (C6+).

Percebe-se que o conhecimento matemático foi aplicado adequadamente na resolução S4A10, sendo que a ligação entre as representações verbais e simbólicas mobilizadas, nomeadamente as designações atribuídas às variáveis que foram usadas nas colunas e linhas da tabela (R3+), é clarificadora, perspicaz (R2+) e traduz de forma muito simples os dados do problema (C2+). Além de eficiente, o conhecimento matemático utilizado serve plenamente os objetivos do problema (C3+). Ainda ao nível da capacidade de uso das representações, reconhece-se a falta de alguma explicitação da ideia que superintendeu à produção da tabela (R7-), sendo que as próprias representações utilizadas parecem ser tomadas como óbvias para transmitir o processo de raciocínio utilizado (R6-). Embora seja evidente a eficácia de um procedimento próprio e corretamente executado para resolver o problema (C5+), através de uma representação tabular estratégica (R5+) na qual foram posicionados e relacionados os dados, não é dada uma explicação sobre o modo como a tabela é imaginada e criada. Este caso permite reconhecer a eficácia e perspicácia dos procedimentos matemáticos implicados ainda que a construção das representações usadas tenha sido insuficientemente justificada (C4-). No entanto, a resolução é estruturada por etapas estrategicamente organizadas, não obstante faltar alguma explicitação na operacionalização de cada uma (C7-). A primeira etapa é marcada pela definição da estratégia que consistiu em criar uma tabela de contingência com os dados mais importantes do enunciado; como já se disse, não é oferecido ao leitor o essencial do pensamento que presidiu à conceção da tabela. A segunda etapa é determinada pela explicação do modo como os dados foram relacionados já com base na tabela criada para resolver o problema. E na terceira etapa é registada a solução.

Do estudo das resoluções S5A10 e S6A10, ressalta a sintonia do conhecimento matemático com os dados e informações do problema (C2+), que é traduzida por representações (R2+) verbais e visuais eficazmente interligadas (R3+), indiciando a sua execução eficaz, com perspicácia na resolução S6A10 (C3+) e exaustivamente na resolução S5A10 (C3-). Ambas as resoluções são estruturadas em diferentes etapas de resolução bem organizadas, de modo mais completo na resolução S6A10 (C7+) do que na solução S5A10 (C7-), nas quais são representadas explicitamente e de forma clara as distintas formas de raciocínio manifestadas, com mais perspicácia na resolução S6A10 (R6+) do que na solução S5A10 (R6-).

Na resolução S5A10, a primeira etapa é definida pela escolha do processo de execução, suportado por uma tabela estrategicamente dividida em 63 partes (R5+). A segunda etapa é caraterizada pela atribuição de cores codificadas às células, em resultado da relação entre os dados expressos no enunciado do problema. Na terceira etapa é obtida a resposta correta, através do registo 52 vezes repetido da palavra café, que permitiu contar o número de pessoas que se serviram de café e de sumo, denunciando uma aplicação processual do conhecimento matemático de forma eficaz ainda que através de um procedimento exaustivo (C4-). Na última etapa, é descrita a forma como foi obtida a resposta sem que a mesma consiga ser devidamente explicada. Apesar das representações usadas proporcionarem uma comunicação eficaz, a resolução carece da explicação acerca do modo de registo da palavra café nas células da tabela (R7-).

A particularidade da resolução S6A10 não está na estratégia desenvolvida ou na forma de raciocínio manifestada, mas antes na apresentação de duas abordagens ao problema. Nesta resolução, os dados mais importantes do problema foram registados numa tabela, apesar de se tratar de uma mera forma de disposição dos dados. Na segunda etapa, foram executadas duas abordagens de resolução eficazes, relacionando os dados e as informações do problema e fazendo uso de procedimentos de cálculo para, de forma simples e eficaz (C4+), resolver corretamente o problema. No todo, as resoluções apresentadas revelaram uma capacidade de comunicação clara e perspicaz.

Perante a tabela 5, observa-se o registo codificado dos descritores destinados a descrever a relação de interação entre a Fluência do Conhecimento Matemático e a Flexibilidade Representacional nas resoluções S4A10, S5A10 e S7A10.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S4A10	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	0	+	-	-
S5A10	+	+	-	-	+	+	-	+	+	+	0	+	-	-
S6A10	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	0	+	+

Tabela 5 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Análise das resoluções S7A10 e S8A10

Com um grau de importância diferente em cada situação, estas duas resoluções (Anexo 1) salientam o recurso a esquemas construídos para suportarem o raciocínio manifestado.

Evidências de Originalidade

A forma clara e objetiva de comunicação adequada das resoluções S7A10 e S8A10 (N5+), salienta uma eficácia única, no seio da amostra e, mesmo, no conjunto de todas as resoluções enviadas para o SUB12 acerca deste problema na respetiva fase de apuramento (N1+).

A resolução S7A10 foi estruturada com base numa ideia incomum e com significado (N2+), suportada por uma estratégia apropriada e singular (N3+) e por um raciocínio pormenorizado, claro e personalizado (N4+) que permitiu calcular o número de pessoas que beberam simultaneamente café e sumo. O início da resolução é determinado pela redução da unidade eliminando o número de pessoas que apenas beberam chá, para posteriormente, através de um esquema original relacionar os restantes dados indicados no problema para o resolver corretamente.

Na resolução S8A10, a ideia que impulsionou todo o processo de resolução, ainda que semelhante a outras (N2-), emergiu da relação deduzida dos dados identificados no próprio problema e materializou-se adequadamente por via de uma estratégia própria e singular (N3+), que implicou uma forma esquematizada de traduzir o raciocínio utilizado para calcular o número de pessoas que se serviram de sumo e também de café, apesar de tudo semelhante a outros no seio da amostra (N4-).

Na tabela 6, são apresentados os descritores codificados detetados nas resoluções S7A10 e S8A10, no âmbito do indicador originalidade, com base no referencial de análise.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S7A10	+	+	+	+	+
S8A10	+	-	+	-	+

Tabela 6 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Reparando nas resoluções S7A10 e S8A10, nota-se que a dupla composta por Fluência e Flexibilidade influenciou a construção de resoluções de forma diferente. Em ambas, a compreensão do problema (C6+) foi o fundamento principal para a sua resolução, uma vez que conduziu à mobilização do conhecimento matemático apropriado (C1+), cuja representação adequada (R1+) traduz explicitamente (R2+) as condições do enunciado (C2+). As resoluções revelam claramente a mobilização eficiente e perspicaz do conhecimento matemático envolvido (C3+), estruturado sob representações simbólicas, icónicas e textuais, devidamente interligadas por linguagem natural (R3+) e que refletem a aplicação simples e eficaz dos procedimentos matemáticos implicados (C4+). O modo como as representações foram utilizadas e relacionadas, para além de ter permitido uma comunicação nítida e perspicaz (R7+), também espelhou explicitamente todo o processo de raciocínio utilizado (R6+) em distintas etapas de resolução, habilmente organizadas (C7+).

Na resolução S7A10, são evidentes 4 etapas de resolução. Na primeira etapa, a unidade é reestruturada retirando-lhe o número de pessoas que apenas beberam chá através de uma subtração. Na segunda etapa foi construído um esquema visual estratégico (R5+), marcado pela combinação de representações próprias (R4+) com representações numéricas, que traduz a relação estabelecida entre o número de pessoas que beberam café e o número de pessoas que se serviram de sumo. Neste esquema, as letras A e B, tal como o ponto de interrogação, funcionaram como incógnitas representativas, respetivamente, do número de pessoas que beberam só sumo, do número de pessoas que só beberam café e do número de pessoas que ingeriram as duas bebidas. Na terceira etapa, recorrendo às operações aritméticas de adição e subtração, foram identificados os valores correspondentes às letras A e B e ao ponto de interrogação representados no esquema construído, que permitiram solucionar corretamente o problema. A última etapa é constituída pelo registo da resposta.

De acordo com a análise feita à resolução S8A10, são visíveis três fases. Na primeira fase são identificados os dados mais importantes do problema. Na segunda fase, é operacionalizada a estratégia escolhida que resultou na esquematização do processo de raciocínio, através da combinação de representações próprias pertinentes (R4+) com representações simbólicas e verbais, que permitiram a conjugação de setas e retângulos, numa espécie de diagrama, incluindo justificações, dados numéricos e operações, com vista a calcular o número de pessoas que ingeriram as duas bebidas. Na última fase, é registada a resposta.

Tendo em conta a tabela 7, é possível visualizar graficamente a codificação dos descritores relativos aos indicadores Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional, emergida da aplicação do referencial de análise nas resoluções S7A10 e S8A10.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S7A10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S8A10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	+	**0**	+	+

Tabela 7 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Análise das resoluções S9A10 e S10A10

A particularidade das duas resoluções (Anexo 1) assenta na descrição do total de pessoas referidas no problema, através de estratégias personalizadas que permitiram resolver corretamente o problema, usando representações de caráter essencialmente icónico.

Evidências de Originalidade

Em termos de originalidade, as duas resoluções são únicas (N1+) e assentam em ideias incomuns cheias de significado (N2+), alicerçadas em estratégias singulares adequadas (N3+) e em raciocínios claramente distintos entre si e dos restantes (N4+), sendo que o processo de comunicação demonstra pouca objetividade em qualquer das duas resoluções (N5-).

Na resolução S9A10, é visível o recurso a colunas coloridas para organizar e relacionar a informação chave do problema para o resolver. Já na resolução S10A10, o mesmo tipo de ação é efetuada estrategicamente através de representações próprias, reproduzindo as condições do problema. Podemos perceber que inicialmente foram desenhados os círculos amarelos e os círculos castanhos. Depois foram pintados os círculos de cor-de-rosa, incluindo os círculos que ainda não tinham cor nenhuma e também os círculos amarelos que foram coloridos em metade com a segunda cor (rosa).

Na tabela 8 é espelhada a codificação atribuída aos descritores subjacentes ao indicador Originalidade que emergiram da análise das resoluções S9A10 e S10A10, com base na aplicação do referencial de análise.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S9A10	+	+	+	+	-
S10A10	+	+	+	+	-

Tabela 8 - Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Examinando as resoluções S9A10 e S10A10, é possível identificar a Fluência e a Flexibilidade espelhadas pelo uso adequado das representações utilizadas (R1+), que denunciam a mobilização de conhecimento apropriado (C1+), refletem explicitamente o processo de raciocínio utilizado (R6+) e confirmam a compreensão do problema (C6+). O recurso a diferentes sistemas de representação, salientando-se as representações icónicas e visuais (R3+), expõe claramente a relação simbiótica entre o conhecimento matemático e o raciocínio envolvido e as caraterísticas do problema (C2+ e R2+). Até certo ponto, as representações de caráter visual constituíram um apoio à comunicação do pensamento matemático desenvolvido, sendo porém bastante mais clara e detalhada a forma de expressar o raciocínio na solução S9A10 (R7+) do que na solução S10A10 (R7-), em que o esquema e o uso das cores parecem dominar a comunicação da resolução, ficando ocultada a forma como os resultados numéricos apresentados no final foram encontrados. Da mesma forma a estruturação das etapas de resolução do problema são visíveis na resolução S9A10 (C7+) e estão muito pouco claras na resolução S10A10 (C7-), ainda que sejamos levados a supor que toda a procura da solução é feita ao longo da construção do esquema dos círculos e do uso das cores.

Na solução S9A10 são distinguidas quatro etapas: A primeira etapa é marcada pela redução da unidade, subtraindo-lhe o número de pessoas que apenas beberam chá. Na segunda etapa é continuada a redução da unidade retirando-lhe o número de pessoas que só beberam café. Na terceira etapa, aparentemente, a solução foi complementada, validada e ilustrada por meio de um esquema visual que revela uma representação exaustiva de todas as pessoas referidas no enunciado (C3-), sugerindo um processo de contagem, aparentemente associado ao uso de células e de uma sequência numérica automática (provavelmente obtida numa folha de cálculo) que não acrescenta simplicidade ou robustez à resolução (C4-). O processo reflete a execução de um procedimento próprio (C5+), que implicou relacionar os dados obtidos nas etapas anteriores e os dados do enunciado, dispondo-os estrategicamente em formato de colunas, lado a lado, verticalmente. Enquanto que a unidade foi representada através dos primeiros 63 números naturais, os restantes dados foram estrategicamente representados num formato particular: as pessoas que beberam café foram representadas pela letra minúscula *c* repetida 52 vezes e destacadas numa coluna azul; as pessoas que beberam sumo foram representadas pela letra minúscula *s* repetida verticalmente 37 vezes, entre as quais 32 foram integradas numa coluna de cor verde para identificar as que também ingeriram café; as pessoas que beberam apenas chá foram codificadas através de uma coluna vermelha sem letras. Na última etapa foi registada a resposta, que é corroborada pelo número de letras *s* e *c* dispostas lado a lado.

Na resolução S10A10, verifica-se essencialmente o uso de representações próprias pertinentes (R4+), usadas estratégica e eficazmente (R5+) para resolver o problema e que, ao mesmo tempo, mostram a operacionalização de um procedimento próprio (C5+), tal como na resolução S9A10, ainda que apenas se possa conjeturar a forma como as várias etapas de resolução tiveram lugar (C7-). A primeira etapa parece consistir na representação de 63 círculos representativos do número total de pessoas presentes no *buffet* do pequeno-almoço. A segunda etapa foi caraterizada pela execução da estratégia escolhida, cujo processo consistiu em pintar os círculos representativos da unidade de acordo com as relações estabelecidas entre os dados destacados no enunciado, devidamente legendados. De acordo com a legenda indicada, não se observa um conhecimento matemático relevante a ser utilizado (C3-), nem procedimento suficientemente ágil (C4-) para resolver o problema: primeiro foi preciso pintar de vermelho os círculos correspondentes às pessoas que só beberam chá; depois foram pintados de amarelo os círculos representativos das pessoas que beberam café; posteriormente foram codificados com a cor rosa os círculos associados às pessoas que só beberam sumo; e finalmente foram identificados com duas cores os círculos que permitiram solucionar o problema, ou seja, o número de pessoas que se serviram das duas bebidas.

A tabela 9 é representativa dos descritores direcionados para analisar a Fluência do Conhecimento Matemático e a Flexibilidade Representacional nas resoluções S9A10 e S10A10.

Indicadores	Fluência (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S9A10	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S10A10	+	+	-	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-

Tabela 9 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Síntese analítica das resoluções

Na tabela 10, são apresentados os descritores codificados de acordo com a análise efetuada às resoluções referentes ao problema “Pequeno Almoço no hotel”, da fase 10 de apuramento do SUB12 da edição 2012/2013, selecionadas para este estudo com o intuito de serem submetidas à aplicação do referencial de análise para estudar o fenómeno da criatividade.

Indicadores	Originalidade (O)					Fluência/Proficiênca (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Novidade (N)					Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	N1	N2	N3	N4	N5	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1A10	+	-	+	-	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S2A10	+	-	+	-	-	+	+	-	+	0	+	-	+	-	-	+	-	+	-
S3A10	+	-	+	-	+	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	+	+	+	+
S4A10	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	0	+	-	-
S5A10	+	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	+	0	+	-	-
S6A10	+	-	-	-	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	0	+	+
S7A10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S8A10	+	-	+	-	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	0	+	+
S9A10	+	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S10A10	+	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-

Tabela 10 - Evidências da criatividade nas resoluções do problema 10, edição 12/13

Os gráficos paralelepipédicos expostos na figura 4 são representativos de cada uma das resoluções analisadas, tal como descritas na tabela 10, e a sua construção foi obtida com base no apuramento dos descritores associados a cada uma das componentes da criatividade: Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional.

De forma complementar, pretende-se com os dados registados na tabela 10 e as representações gráficas da figura 4, oferecer uma perspetiva geral da criatividade manifestada neste conjunto de 10 resoluções, construídas no contexto da resolução de problemas de matemática do SUB12. Em cada um dos paralelepípedos tridimensionais, a variação da altura, do comprimento e da largura, resulta das evidências da criatividade detetadas nas resoluções, em termos da codificação dos 19 descritores constantes do referencial de análise, dos quais cinco estão associados ao indicador Originalidade, 7 estão indexados ao indicador Fluência do Conhecimento Matemático e 7 estão associados ao indicador Flexibilidade Representacional.

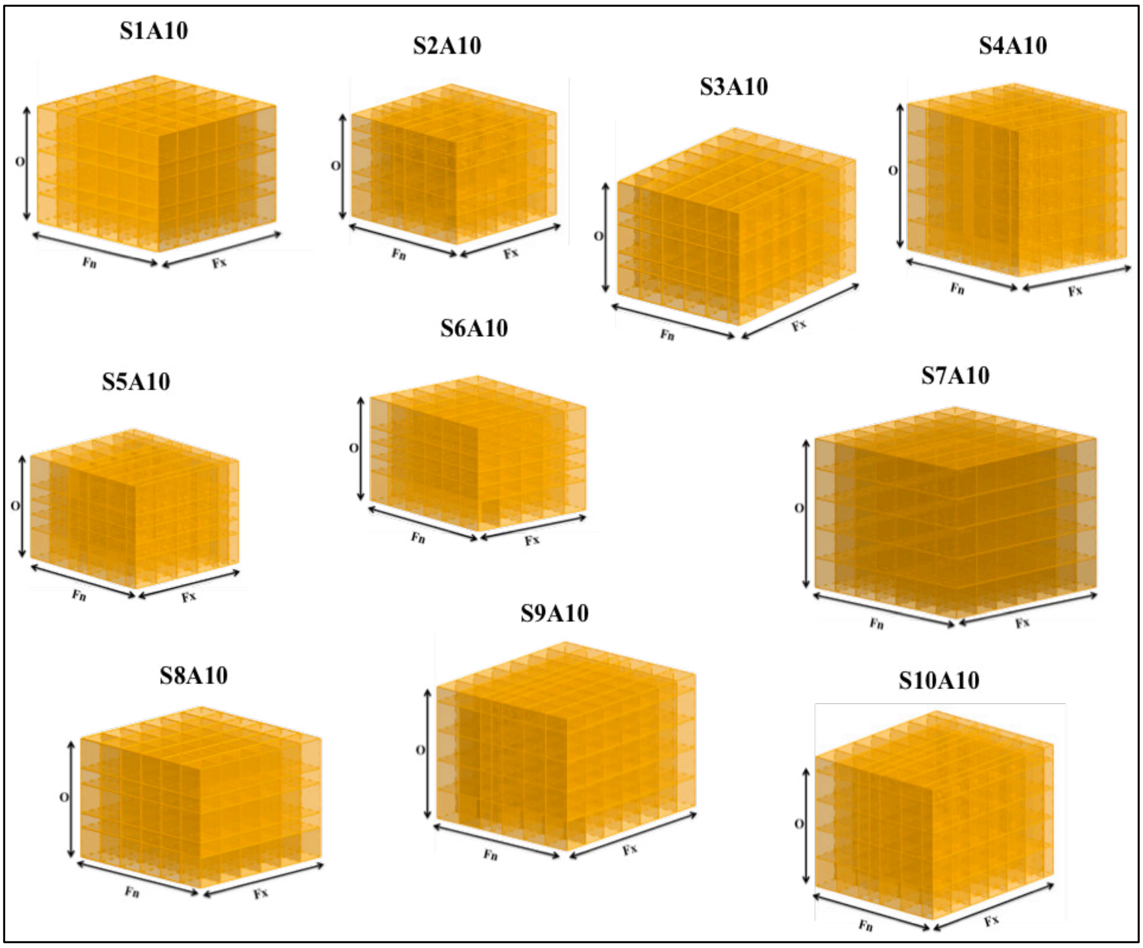


Figura 4 – Criatividade nas resoluções do problema 10, edição 12/13

Em termos de originalidade, as resoluções são consideradas distintas quando comparadas entre si e com todas as outras que foram enviadas para a organização do SUB12 na fase de apuramento. Nos gráficos, a variação da altura está diretamente relacionada com a codificação das resoluções à luz de parâmetros que descrevem o invulgar, o singular, o incomum, o distinto, ou o diferente, sistematicamente associados à noção da eficácia, de sucesso, validade, utilidade, etc. das resoluções propostas. No que diz respeito à fluência e à flexibilidade, a codificação das resoluções atendeu à fluência na mobilização e aplicação de conhecimento matemático (ideias, conceitos, procedimentos, raciocínios, estratégias de resolução) em articulação com a flexibilidade representacional (uso de representações adequadas e estrategicamente escolhidas, conexão entre sistemas de representação, capacidade expressiva, clareza, simplicidade, robustez, etc.). Estas duas dimensões traduzem-se por variações no comprimento e na largura, respetivamente, de cada um dos paralelepípedos.

Da análise do conjunto examinado, observa-se que a variabilidade da criatividade é relativamente moderada, em termos de cada uma das dimensões consideradas, ainda que se torne nítida em termos do aglomerado das três dimensões. Aparentemente, esta caraterística (paralelepípedos bastante parecidos mas de volumes relativamente distintos) parece compatível com o facto de estarmos a adotar um modelo e uma perspetiva consistente com a ideia de criatividade c-pequeno ou ainda mini-c (Kaufman & Beghetto, 2009). De acordo com esta visão, não se pretendem as ideias geniais, as grandes descobertas, nem se espera o fôlego de resultados matemáticos surpreendentes. A criatividade matemática é ela própria inerente à capacidade de resolução de um problema matemático (Leikin, 2011) por parte dos jovens participantes para quem a situação proposta constitui um desafio, na medida em que os leva a imaginar uma abordagem ao problema, mobilizando o seu conhecimento, os seus recursos e as suas capacidades, no domínio da matemática, de modo a criar (no sentido de algo que é novo para os próprios) todo um processo de resolução estruturado e fundamentado para atingir a solução. A originalidade, portanto, não dispensa a utilidade e a capacidade de atingir um objetivo, que é o de resolver o problema (Polya,1978).

Como evidenciam os resultados obtidos, as distinções entre as várias manifestações de criatividade resultam de variações relativamente ténues nos diversos descritores utilizados para evidenciar cada um dos componentes da criatividade. Em qualquer dos casos, ressalta que a ligação entre a criatividade matemática e um domínio do conhecimento matemático (tanto a nível conceptual como a nível processual) é muito relevante, bem como a habilidade de traduzir matematicamente ideias e processos por meio de sistemas de representação variados (Aizikovitsh-Udi, 2013). Tanto a fluência de conhecimento matemático (não necessariamente conhecimento escolar ou curricular mas em vários casos, um conhecimento informal e espontâneo) como a flexibilidade representacional representam uma fortificação da originalidade de cada uma das resoluções analisadas. Por outras palavras, tudo leva a supor que a originalidade na resolução de problemas matemáticos tem como contraponto a presença de dimensões cognitivas ligadas à compreensão, ao raciocínio e à comunicação matemática. Com efeito, as boas ideias para a resolução criativa de um problema de matemática passam pela capacidade de as operacionalizar de alguma forma. Logo, a criatividade matemática dos jovens participantes reflete não apenas o lado inovador das suas abordagens aos problemas (em termos de estratégias, ideias, conceitos envolvidos), mas também o lado proficiente que requer a concretização e a execução, ou seja, coloca o solucionador na situação de fazer Matemática em torno da questão a resolver (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009; Zazkis & Holton, 2009; Silver, 1997).

Como tem sido referido por vários teóricos, a dimensão da fluência ou mesmo a da flexibilidade não bastam para fazer despontar boas ideias. A capacidade de gerar muitas ideias acerca de uma determinada questão ou tema (muitas vezes designada por fluência ideacional) não é suficiente, nem é o mais determinante na criatividade matemática. Por exemplo, casos que poderão ser indicadores de uma menor fluência de conhecimento matemático, como o da resolução S10A10, demonstram que o uso de um processo porventura mais frágil e menos sofisticado em termos matemáticos não implica uma menor criatividade matemática. Nesta resposta impera, em contrapartida, uma capacidade de usar representações, simples, diretas e de natureza eminentemente icónica (colorir 63 círculos de formas específicas), que viabilizam e, ao mesmo tempo, traduzem o processo de obter a resposta ao problema. Assim, parece sair reforçada da análise destas resoluções a ideia de que a flexibilidade representacional constitui uma vantagem muito importante para a capacidade de resolução de problemas (Preston & Garner, 2003; Stylianou, 2008) e tem uma influência clara na criatividade matemática dos produtos criados pelos participantes no SUB12. Em particular, há indícios de que a originalidade das resoluções é diretamente influenciada pela flexibilidade representacional, ou seja, pela capacidade de representar o conhecimento e o pensamento matemático de forma singular.

Aliada à variabilidade dos produtos analisados, está o modo como os participantes optam pelos caminhos e estratégias que preferem, bem como pelas formas de apresentação e comunicação que entendem mais eficazes. Esta liberdade de utilização de procedimentos, modos de representação, raciocínios e ideias próprias que lhes é permitida no contexto do SUB12 parece ser assumida claramente pelos participantes e ter consequências muito positivas sobre a sua capacidade de inovar e de superar os desafios matemáticos propostos. Assim, é de sublinhar que a variabilidade pode ser um resultado importante da liberdade que o próprio contexto extracurricular oferece (Mann, 2006; Ching, 1997).

Nas resoluções nota-se o recurso a diversos conceitos matemáticos e procedimentos relacionados com conjuntos, comparação de conjuntos, operações aritméticas e números, modos de contagem informais, que permitiram manejar os dados fornecidos no problema e chegar à solução. A presença da fluência do conhecimento matemático é demostrada pela capacidade de os solucionadores fazerem a escolha de estratégias apropriadas para suportar o raciocínio que este problema, em particular, exigia para ser resolvido (NCTM, 2014). Aqui, o raciocínio matemático é entendido como a habilidade demonstrada para compreender a questão levantada no enunciado e a aptidão para construir abordagens que conduziram à solução do problema (OCDE, 2013). Esta forma de agir carateriza o engenho para relacionar esquemas de raciocínio e métodos de resolução de problemas decorrentes da compreensão da informação disponibilizada, aliado à capacidade de pensar e trabalhar de forma abstrata e flexível (Freiman, 2006; Krutetskii, 1976, Miller, 1990, citado em Freiman, 2009; Miller, 1990, citado em Freiman, 2009).

A flexibilidade representacional, com implicações na originalidade, revelou-se também nos processos de comunicação que destacaram as formas de raciocínio levadas a cabo para resolver o problema, materializadas através da combinação de representações simbólicas, verbais, icónicas e visuais (tabelas, esquemas, diagramas de *Venn*, *smiles*, setas, caixas de texto, letras, palavras, cores, ...). As representações utilizadas permitiram expor as formas de raciocínio mobilizadas em cada caso, responsáveis pela exploração e execução inovadora do conhecimento matemático necessário que foi evocado para resolver o problema. Nestes casos, as representações externas registadas permitiram, regra geral, exteriorizar as representações internas resultantes dos esquemas mentais construídos pelos participantes para comunicarem a sua compreensão do problema e explicarem como o resolveram (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008). Sendo assim, e tendo em conta o campo empírico da investigação, a flexibilidade representacional distingue participantes com abordagens adequadas para gerar uma resposta ao problema proposto e, ao mesmo tempo, capazes de escolherem as representações mais adequadas para comunicarem as resoluções, com base nas estratégias adotadas (Starko, 2009). Desta forma, embora a originalidade seja um componente importante da criatividade, não é suficiente por si só para caraterizar os elementos criativos nas resoluções (Beghetto, 2007; Runco, 2003; Runco, 2006; Runco, 2004; Runco & Jaeger, 2012).

A caraterização da criatividade matemática manifestada nas 10 resoluções aponta para a fluência do conhecimento matemático como responsável pela relevância da compreensão do problema e pela mobilização de ideias e conceitos significativos, ao mesmo tempo que o modo original de os representar implicou que houvesse flexibilidade representacional. Desta forma, o domínio do conhecimento no campo da resolução do problema foi determinante para relacionar e organizar a informação disponibilizada no enunciado e determinou o modo como foi usada para obter a solução correta (Sheffield, 2009). Constituindo uma situação desafiante, este problema incentivou a estruturação do pensamento, na procura de ligações entre os dados e condições do problema, apoiada na experiência (Freiman, 2006). Desta forma, a fluência do conhecimento matemático associa-se ao significado matemático na criatividade matemática e a flexibilidade representacional relaciona-se com o uso, aplicação e utilidade de ferramentas (mais ou menos informais) que provaram ser importantes na execução do processo de resolução. Os dados permitem constatar, neste contexto, que a manifestação do fenómeno criativo esteve dependente da sintonia das três dimensões consideradas no referencial de análise proposto neste estudo: Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional.

4.2.2. Resoluções do problema 7 da edição 2012/13

A situação colocada no problema "Fechado a cadeado" (figura 5) pode ser encarada como uma situação que envolve a procura de um padrão e a construção de uma sequência numérica, apelando a um raciocínio indutivo, na medida em que é preciso testar, uma a uma, cada chave em todos os cadeados para saber qual o cadeado que lhe corresponde. O problema refere ainda uma situação limite (a pior das hipóteses) em que só se encontra o par chave-cadeado na última tentativa, quando todos os cadeados, menos um, já foram testados e rejeitados. O raciocínio indutivo pode sugerir uma ordenação das chaves, v1, v2, …, v20, e dos cadeados, d1, d2, …, d20, e uma estratégia que estabelece todos os testes feitos com a chave v1 (em 19 cadeados), com a chave v2 (em 18 cadeados), etc., considerando que só o último cadeado combinará com a chave que está a ser testada. Assim, trata-se de pensar organizadamente no número de testes que irá ser realizado com cada chave e isso permitirá chegar ao total de testes: a soma dos primeiros 19 números naturais.

Problema 7: **Fechado a cadeado**

Numa gaveta temos 20 cadeados e 20 chaves. Cada chave abre um e um só cadeado mas não sabemos que chave corresponde a cada cadeado. Para associar cada chave ao cadeado que lhe corresponde teremos de proceder por tentativas. Suponhamos então que uma tentativa significa experimentar uma chave num cadeado.

Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 5 - Problema 7, edição 12/13

O principal motivo que levou à seleção das 10 resoluções associadas a este problema esteve relacionado com o facto de todos os participantes terem recorrido estrategicamente à representação tabular como um componente central da resolução que lhes permitiu desenvolver a estratégia escolhida, bem como organizar, operacionalizar e representar o conhecimento matemático que usaram para encontrar a solução. Quando comparadas entre si, todas as 10 resoluções são distintas, apesar de os participantes que as construíram se terem apoiado em tabelas como ponto de partida comum para obter a solução, cada uma construída à sua maneira. A originalidade residiu na personalização e concretização das ideias conducentes à solução, através das estratégias, raciocínios e formas de comunicar mobilizados. No entanto, comparando as resoluções entre si, em termos dos descritores constantes do referencial de análise, verifica-se que a sua presença não é homogénea em todas as resoluções e nalguns casos não se observam. Com efeito, os indicadores de Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional revelam-se mais vincados nuns casos do que noutros, como será descrito mais especificamente em seguida. A análise das resoluções será feita em 4 grupos, tendo em conta o raciocínio manifestado para relacionar os dados através da representação tabular, visando a obtenção do padrão numérico determinado pelos primeiros dezanove números naturais que adicionados permitiram responder à questão levantada no problema.

Análise das resoluções S1A7 e S2A7

Em ambas as resoluções, o raciocínio mobilizado assenta na ideia de começar a fazer a contagem de tentativas falhadas, começando pelo menor conjunto de chaves e cadeados. Na resolução S1A7 (Anexo 2), a contagem é iniciada tendo em conta apenas uma chave e um cadeado, analisando depois, exaustivamente o que acontece quando se acrescenta mais uma chave e um cadeado. E na solução S2A7 (Anexo 2), a descrição do processo de resolução é iniciado considerando duas chaves e dois cadeados para posteriormente ir acrescentando sucessivamente mais um par chave-cadeado. Nesta resolução, não foi necessário contabilizar exaustivamente todas as tentativas falhadas de atribuir uma chave a cada cadeado, sendo generalizado, a partir de um pequeno número de casos, o padrão numérico que possibilitou obter uma sequência dos primeiros dezanove números naturais que adicionados sistematicamente permitiram solucionar o problema. A ideia subjacente, nas duas resoluções, é a de que ao acrescentar mais uma chave e um cadeado, a nova chave irá ser testada em todos os cadeados menos um (que será o cadeado certo), sendo este número igual ao número de chaves ou cadeados anterior. Há, portanto, um claro raciocínio indutivo que conduz a um padrão aditivo que utiliza o termo anteriormente obtido para identificar o número seguinte de tentativas falhadas.

Evidências de Originalidade

No que diz respeito à Originalidade, a resolução S1A7 é eficaz mas exaustiva, tem vários traços de invulgaridade (N1+), centrando-se numa ideia significativa que não é genuinamente única (N2-) e que está por detrás da operacionalização de uma estratégia singular e adequada (N3+), traduzindo um raciocínio claro de construção de um padrão por recorrência (N4-) na abordagem do problema, embora não invulgar. Toda a estratégia de ataque ao problema é operada numa tabela de três colunas que, de forma exaustiva, mostra a adição das tentativas falhadas, oferecendo uma ideia do processo indutivo envolvido e da soma cumulativa de tentativas falhadas. O modo de comunicar todo o processo é objetivo e invulgarmente muito estruturado, revelando uma sequência de passos decisivos e mostrando as várias ideias e conclusões obtidas ao longo do percurso (N5+). A resposta é muito completa, revela preocupação com o detalhe e com a clareza da apresentação, para além de exibir uma organização irrepreensível.

Em termos de Originalidade, a resolução S2A7 é fora do comum e eficaz (N1+) pela forma como estabelece uma progressão crescente para o número de chaves e cadeados mostrando que o número de tentativas falhadas corresponde a somar o valor já obtido no caso anterior ao número de "novas" tentativas a realizar (equivalente ao número de chaves ou cadeados que existiam no caso anterior), embora essa informação não seja clara quando são analisados os dados da tabela. Além disso, a adequação da ideia que a suporta é semelhante à da resolução S1A7 (N2-), distinguindo-se na forma como foi desenvolvida através do esboço de uma tabela, de duas colunas, a partir da qual emergiu a regularidade e recursividade do padrão numérico resultante, revelando-se uma estratégia adequada e singular (N3+), na qual o raciocínio descrito nem sempre é claro (N4-). Apesar de a comunicação ser simples e diferente da usada nas restantes (N5-), não é totalmente explicado como é obtido o número de novas tentativas a partir do número de tentativas das experiências anteriores.

Na tabela 11 é refletida a súmula da originalidade evidenciada nas resoluções S1A7 e S2A7.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S1A7	+	-	+	-	+
S2A7	+	-	+	-	-

Tabela 11– Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

No que toca à Fluência do Conhecimento Matemático e à Flexibilidade Representacional, estes parâmetros parecem estar vincados de forma muito nítida na resolução S1A7, uma vez que através deles ressalta a compreensão do problema (C6+), evidente na representação adequada que foi utilizada (R1+) e no conhecimento matemático mobilizado apropriadamente (C1+), bem como da sua execução de forma eficiente, ainda que exaustiva (C3-), com recurso a uma combinação de linguagem natural e linguagem simbólica (R3+). As representações utilizadas transmitem o processo de raciocínio utlizado (R6+), no qual é evidente a sintonia entre o conhecimento matemático e os dados e condições (C2+), tal como a sua aplicação através dos procedimentos matemáticos necessários apesar da sua repetição sistemática (C4-). A resolução está ainda claramente documentada e organizada em distintas etapas de resolução (C7+). Na primeira etapa (a) são registados os dados mais importantes do problema. Na segunda etapa (b) é definida e explicada a estratégia de resolução e a sua operacionalização a partir de uma representação tabular central (R5+), constituída por três colunas, entre as quais a primeira refere-se ao número de chaves e de cadeados; a segunda à combinação das tentativas falhadas para associar cada chave ao respetivo cadeado; e a terceira para registar a soma das tentativas efetuadas em cada situação. A terceira etapa (c) é caraterizada pela operacionalização da estratégia eleita, que traduz o uso de um raciocínio indutivo, através do qual são relacionados os dados e construída uma regra de obtenção dos termos seguintes. A organização das informações na tabela ilustra na primeira coluna a sequência dos primeiros dezanove números naturais subjacente ao número de chaves e cadeados; na segunda coluna é representado o número de tentativas falhadas resultantes da combinação dos números associados aos cadeados e às chaves registados na primeira coluna, recorrendo à soma recursiva; e na terceira coluna é patente a soma acumulada das tentativas falhadas à medida que o número de pares chave-cadeado vai aumentando. Apesar de não se encontrarem representações com um caráter eminentemente visual, o próprio preenchimento da tabela acaba por sublinhar visualmente o aumento sucessivo das parcelas adicionadas, exaustivamente, e a estrutura recursiva dos valores obtidos linha a linha. Na última etapa (d) foi registada a solução do problema. As representações utilizadas permitiram uma comunicação eficaz (R7+) da resolução construída, traduzida por uma grande clareza e organização, na qual são revelados os passos efetuados e explicados detalhadamente. Em certo sentido, esta resolução é reveladora da produção de resultados no domínio do conhecimento matemático, associando o problema dado a uma certa tipologia de problemas cuja resolução se obtém por meio de uma soma acumulada de termos anteriores.

Quanto à Fluência e Flexibilidade, considera-se que na resolução S2A7 o conhecimento matemático é mobilizado apropriadamente (C1+) e reflete a compreensão do problema (C6+), sendo igualmente perspicaz e eficiente a forma de execução da estratégia seguida (C3+), recorrendo a representações simbólicas e verbais apropriadas (R1+), mas nem sempre bem interligadas (R3-). Em sentido complementar, a eficácia e simplicidade dos procedimentos associados (C4+) propõe uma tradução matemática da situação que exibe o início de um padrão recursivo, bem como a sua generalização. A sincronização, nem sempre clarificadora, entre as representações e os dados do problema (R2-), não mostram total sintonia entre o conhecimento matemático e os dados (C2-), facto que condiciona em determinados momentos a clareza do processo de raciocínio seguido (R6-), apesar de alguns elementos originais na descrição sintética do padrão encontrado e reveladores de um processo de generalização.

Ao longo da resolução são destacadas diferentes etapas estrategicamente organizadas (C7+). Na primeira etapa (a) é definida a estratégia de resolução operacionalizada em torno de uma tabela com duas colunas, sendo a primeira destinada ao número de chaves e de cadeados e a segunda ao número de tentativas empreendidas. A construção da tabela é claramente estratégica (R5+) para a representação do modelo conceptual subjacente à obtenção da solução. A segunda etapa (b) é marcada pelo desenvolvimento da estratégia usada, na qual estão presentes conceitos relevantes relacionados com a construção recursiva de um padrão numérico e a sua generalização. Nesta fase, a tabela funcionou como um elemento propulsor para a obtenção da expressão final e não como uma forma de registo exaustivo de todos os casos. A resolução apresenta, por isso, um elevado grau de abstração. No entanto, nesta etapa parece omissa a forma de determinação das "novas tentativas" quando o número de chaves e cadeados passa ao seguinte. Isto é, ainda que a resolução revele algum pormenor, a forma de obtenção do termo seguinte da sequência é um pouco obscura na explicação fornecida. Não é representada de forma clara a relação entre as parcelas apresentadas em cada linha da tabela e o modo como foram estabelecidas, estando ausente uma clara justificação para a nova parcela que surge em cada uma das linhas relativamente à linha anterior (as "novas tentativas"). Apesar desta insuficiência, parece possível admitir que esta resolução sugere um novo resultado no domínio do problema, isto é, uma capacidade de generalização e extensão, centrada na adição cumulativa do número de tentativas falhadas. A terceira etapa (c) é marcada pela representação da sequência da soma de números naturais que emergiu da generalização obtida a partir da tabela. Termina, apresentando de uma forma abreviada e distinta a operacionalização do cálculo da expressão numérica encontrada, obtendo a solução do problema. As várias representações matemáticas, designadamente a forma de generalização do padrão ou a forma de cálculo abreviada da soma dos inteiros consecutivos, são pertinentes e úteis. Na quarta etapa (c) é registada a resposta. No todo, as representações mobilizadas foram fulcrais para clarear uma comunicação, que por vezes se mostrou nublada (R7-), nomeadamente para esclarecer a relação efetuada com os dados da tabela abreviada para obter o padrão recursivo que exibiu um conjunto de termos iniciais e propôs uma generalização que conduziu à obtenção do último termo e consequentemente à solução do problema. Em síntese, a tabela 12 mostra as evidências da Fluência do

Conhecimento Matemático e de Flexibilidade Representacional detetadas nas resoluções S1A7 e S2A7.

Indicadores	Fluência (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1A7	+	+	-	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S2A7	+	-	+	+	0	+	+	+	-	-	0	+	-	-

Tabela 12 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Análise das resoluções S3A7, S4A7 e S5A7

Nas resoluções, é explícito que o recurso à tabela funcionou para orientar todo o processo que levou à solução, obtida através da adição dos primeiros dezanove números naturais e, ao mesmo tempo, como parte integrante de praticamente todo o processo de explicação. Todas as tabelas foram organizadas e dotadas de pormenor, cuja respetiva descrição é feita de forma sistemática, sequencial, informativa e expressiva.

Evidências de Originalidade

O estudo das resoluções S3A7, S4A7 e S5A7 (Anexo2) distingue produtos originais (N1+), desde logo pelo facto de cada tabela ilustrar de forma personalizada o número de tentativas falhadas para cada uma das chaves testadas.

Todas as resoluções são suportadas por ideias com significado semelhantes entre si (N2-), operacionalizadas a partir de estratégias parecidas (N3-) em torno das tabelas construídas, onde é visível, de forma diferente em cada caso, o resultado de experimentar sucessivamente uma dada chave no conjunto de cadeados por abrir. Cada tabela, à sua maneira, reflete o número de tentativas falhadas antes de se experimentar o último cadeado, que será o certo. Assim, as tabelas são uma forma de contagem sistemática das tentativas falhadas, para cada uma das chaves testadas, cuja estratégia consistiu em considerar cada uma das chaves, de forma sequencial, a percorrer o conjunto de cadeados que estão por abrir, onde, na pior hipótese, a última tentativa será a bem sucedida. A forma de comunicação de cada resolução emite traços de invulgaridade (N5+), que diferencia as formas de raciocínio implicadas (N4+) para obter a solução. A tabela 13 representa um resumo da originalidade das três resoluções.

Indicador	Originalidade (O)				
Descritores	Novidade (N)				
	N1	N2	N3	N4	N5
S3A7	+	-	-	+	+
S4A7	+	-	-	+	+
S5A7	+	-	-	+	+

Tabela 13 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

A tabela 14 reflete a conjugação da fluência com a flexibilidade, no caso das resoluções S3A7, S4A7 e S5A7, reveladas pelo uso apropriado das representações (R1+) sobretudo verbais e simbólicas (R3+), as quais refletem a compreensão do problema (C6+) em sintonia com o conhecimento matemático mobilizado (C1+).

Indicadores	Fluência (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S3A7	+	+	-	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S4A7	+	+	-	-	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+
S5A7	+	+	-	-	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+

Tabela 14 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Nas três soluções, o conhecimento matemático é executado distintamente de forma eficiente e exaustiva para obter a solução (C3-). Em cada resolução, o processo de raciocínio subjacente é explicitado pelas representações usadas e pelas relações estabelecidas entre si (R2+), que revelam organizadamente a ligação do conhecimento matemático com os dados (C2+) em etapas definidas estrategicamente, embora mais evidentes na resolução S3A7 (C7+) do que nas outras (C7-).

Em todas as resoluções, a primeira etapa (a) é marcada pelo recurso a tabelas de dupla entrada como principal componente da estratégia seguida, cada uma operacionalizada de sua forma, para obter a sequência de números naturais que adicionados permitiram resolver o problema. Na segunda etapa (b), as resoluções mostram que a sequência de números foi obtida partindo do princípio que seria preciso testar todas as chaves em cada um dos cadeados até encontrar o par certo. Em cada uma, o processo seguido sugere que o par chave-cadeado só seria encontrado na última tentativa feita para cada cadeado. Na resolução S3A7, o número de tentativas falhadas foi obtido através das sequências numéricas registadas exaustivamente nas colunas da tabela, as quais representam o número de tentativas falhadas para atribuir a chave ao respetivo cadeado, sendo que a última não é contabilizada por corresponder à tentativa bem-sucedida.

A resolução S4A7 mostra que o número de tentativas falhadas foi obtido a partir da sua contagem exaustiva e registada na tabela. Aparentemente, o recurso à letra X (R4-) serviu para garantir a contagem correta e contínua do número de tentativas testadas em cada cadeado até encontrar a chave que lhe correspondia. Na resolução S5A7, o processo de contagem do número de tentativas falhadas para cada caso foi efetuado também exaustivamente mas de forma diferente, recorrendo a uma representação própria materializada pela letra X e não claramente explicada (R4-), para obter a sequência numérica de números naturais que permitiu solucionar o problema por via de uma expressão numérica. As três resoluções exibem a construção de uma forma sistemática de obter o número de tentativas a fazer para cada chave, propondo uma distributividade das chaves pelos cadeados (cada chave percorre os vários cadeados por abrir).

As resoluções apontam para uma abordagem numérica que se poderá traduzir por 19 parcelas, correspondentes às 19 chaves experimentadas, de entre as 20 chaves existentes. Desta abordagem, foi obtido um padrão numérico por via indutiva, isto é, o número de tentativas para cada chave corresponde ao número de cadeados por verificar, menos um: 19, 18, 17, 16,…, 1. A adição dos vários números inteiros consecutivos não é indicada mas está subentendida na resolução S3A7, enquanto que a expressão numérica é assinalada na resolução S5A7; no caso da resolução S4A7 a resposta parece residir unicamente na contagem sistemática. Deste modo, as resoluções evidenciam vários conceitos matemáticos executados de forma simples e eficiente, através de procedimentos relevantes que correspondem a formas organizadas de estabelecer contagens, mas sempre exaustivamente (C4-). Na última etapa (c) de cada resolução é registada a resposta à questão levantada no enunciado. Concluindo, as formas de representação selecionadas e a relação estabelecida entre elas (C6+) permitiram a comunicação eficaz (R7+) das resoluções, revelando a ligação do conhecimento matemático com os dados (C2+), a estrutura matemática envolvida e a organização do modelo conceptual em duas componentes fundamentais: a representação estratégica na forma de tabelas para a concretização da situação (R5+) e a obtenção de informação numérica relevante a partir das mesmas. Embora claras e fáceis de compreender, as soluções reproduzem exaustivamente todas as tentativas necessárias, indiciando processos repetitivos e sequenciais longos.

Como já referido, as resoluções S4A7 e S5A7 recorrem à letra X como forma de exprimir cada tentativa falhada ou desencontro entre a chave e o cadeado (R4-), no caso da primeira para sinalizar as células da tabela que foram excluídas do processo de contagem; e no caso da segunda para obter o padrão numérico correspondente aos primeiros dezanove números naturais que adicionados permitem obter a solução. O modo de representação é eficaz em cada situação, mas não aligeira a obtenção da resposta que evidencia uma contagem, caso a caso, mesmo estando encontrada a regularidade numérica para as tentativas falhadas.

Análise das resoluções S6A7, S7A7 e S8A7

As resoluções S6A7, S7A7 e S8A7 (Anexo 2), apresentam no início tabelas de dupla entrada com 20 linhas e 20 colunas, sendo as linhas relativas às 20 chaves ordenadas e as colunas afetas aos 20 cadeados ordenados, as quais são utilizadas como componente central das estratégias selecionadas para resolver o problema de forma incomum em cada caso.

Evidências de Originalidade

Na dimensão da Originalidade, e em sintonia com a tabela 15, começar-se-á por registar que as resoluçções são invulgares (N1+), embora sejam, também, fortemente apoiadas pela representação tabular. Em ambas, é observável que a relação estabelecida entre chave-cadeado é simétrica, pelo que experimentar a chave i para o cadeado j é equivalente a experimentar o cadeado j para a chave i. Esta relação simétrica é destacada na resolução S6A7 pela letra X e pela letra V nas outras duas resoluções, visíveis em cada tabela na diagonal e onde é comprovável claramente que os resultados a considerar correspondem à metade da tabela acima da diagonal.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S6A7	+	-	+	+	+
S7A7	+	-	+	+	+
S8A7	+	-	+	+	+

Tabela 15 – Síntese da Originalidade

Embora as três resoluções partam de ideias semelhantes (N2-), há aspetos de singularidade em cada estratégia (N3+), sendo evidente a particularidade de cada raciocínio mobilizado (N4+). O que distingue a solução S8A7 das outras duas, nomeadamente da S6A7, é a apresentação de uma segunda forma de resolver o problema recorrendo à média aritmética. O que distingue a resolução S7A7 das restantes é a obtenção de uma expressão numérica, a partir dos dados relacionados na tabela que revela o raciocínio utilizado para obter o número máximo de tentativas falhadas. A comunicação da forma de abordar os problemas é bastante clara, a maneira como as tabelas são preenchidas é portadora de significado e nota-se cuidado e preocupação em apresentar toda a informação necessária. Há uma objetividade invulgar na construção da resposta, que se traduz em calcular o número de entradas da tabela, acima ou abaixo da diagonal (N5+).

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Nos planos da Fluência e da Flexibilidade, e com base na tabela 16, nas três resoluções é evidente a adequação do conhecimento matemático mobilizado (C1+) e a sua execução de forma eficiente e perspicaz (C3+), por via de processos simples e corretos (C4+), que traduzem inequivocamente a compreensão do problema (C6+).

Indicadores	Fluência (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S6A7	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+
S7A7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+
S8A7	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+

Tabela 16 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Nas três resoluções, o uso de representações adequadas (R1+), particularmente, icónicas (onde se inclui o uso das cores), simbólicas e verbais (R3+), devidamente relacionadas entre si (R2+), promoveram a sintonia do conhecimento matemático com os dados (C2+), exprimindo o raciocínio produzido (R6+) e contribuindo para uma comunicação eficaz (R7+); as resoluções apresentam-se organizadas em diferentes etapas, se bem que de forma mais nítida e estruturada na resolução S7A7 (C7+) do que nas S6A7 e S8A7 (C7-). Na primeira etapa (a) reconhece-se a operacionalização das estratégias escolhidas recorrendo à representação tabular (R5+), como componente principal de todo o processo de resolução. Na segunda etapa (b) são relacionados os dados mais importantes para obter a solução, ou seja, o número de tentativas falhadas para encontrar o par chave-cadeado. Nas resoluções são encontrados vários conceitos matemáticos relevantes e adequados, designadamente a ideia de um produto cartesiano entre o conjunto de chaves e o conjunto de cadeados, expressos em tabelas de dupla entrada. A representação dos acertos entre chave e cadeado é traduzida pela ideia de que a i-ésima chave pertence ao i-ésimo cadeado, o que mostra uma forma de simplificação da situação, sem perda de generalidade. Em cada uma, o cálculo das tentativas falhadas, a partir dos dados relacionados nas tabelas, é obtido com base em raciocínios diferentes. Na resolução S6A7 é usada a letra X (R4-) para identificar a tentativa bem sucedida de atribuir a chave certa a cada cadeado e, a partir dela, garantir o padrão numérico que permite responder à questão levantada no problema. Na resolução S7A7 é usada uma expressão numérica que conjuga as tentativas bem-sucedidas, identificadas com a letra V (R4-), com o número de chaves e o número de cadeados. Verifica-se que a expressão numérica permitiu obter o número de tentativas falhadas conjuntamente com o número de tentativas bem-sucedidas, para depois chegar à solução subtraindo as tentativas bem-sucedidas. No caso da resolução S8A7, o cálculo das tentativas falhadas é apoiado por duas formas de raciocínio: calcular o número de células que correspondem a tentativas falhadas ou multiplicar o número médio de tentativas falhadas pelo número de chaves (ou cadeados). Tal como a anterior, esta resolução recorre à letra V (R4-) para identificar as tentativas bem-sucedidas e a partir delas obter o padrão numérico correspondente aos primeiros dezanove números naturais. As três resoluções indicam um conhecimento matemático relevante envolvido em todas as abordagens adotadas, desde a noção da simetria entre chave e cadeado, patente na tabela, até ao modo como a determinação das tentativas falhadas é obtido e justificado. Segue-se uma etapa de apresentação do resultado (c), sendo de notar que, no caso da resolução S8A7, a solução é obtida de duas formas distintas e que é acrescentada uma nota final acerca da interpretação do resultado.

Análise das resoluções S9A7 e S10A7

As resoluções baseiam-se em dois processos diferentes para obter a sequência dos primeiros números naturais cuja soma permite solucionar o problema, embora partam de uma ideia semelhante.

Evidências de Originalidade

No que se refere à Originalidade, cujas evidências foram registadas na tabela 17, considera-se que são resoluções invulgares (N1+), ao descreverem, de forma diferenciada, ideias semelhantes (N2-), dando suporte às estratégias diferenciadas seguidas, ambas sendo claramente adequadas (N3+) para a manifestação dos raciocínios (N4+) desenvolvidos.

Indicadores	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S9A7	+	-	+	+	+
S10A7	+	-	+	+	+

Tabela 17 – Síntese da Originalidade

A forma invulgar e objetiva usada para comunicar cada resolução (N5+) possibilitou reconhecer o processo envolvido na testagem de cada uma das chaves para encontrar o cadeado certo: no caso da resolução S9A7, recorrendo a uma tabela para relacionar o número de tentativas de cada chave em cada um dos 20 cadeados; já na resolução S10A7, a solução foi obtida por generalização com base em representações icónicas, através das quais foi identificado um certo número de casos para encontrar o par chave-cadeado. Cada resolução tem eficácia, mostrando que não é necessária a representação exaustiva de todos os testes, sendo feita a sua tradução para a linguagem numérica, no caso da solução S9A7, intuindo que para cada cadeado, na pior das hipóteses, a respetiva chave seria encontrada na última tentativa; da mesma forma, mas a partir de um número limitado de casos, é obtida a sequência dos primeiros números naturais que permitiram obter a solução através da sua adição sistemática. Portanto, às duas resoluções está associado um elemento de simplicidade associado à eficácia.

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Nas dimensões da Fluência e da Flexibilidade, a ideia de distributividade entre as várias chaves e o conjunto de cadeados é claramente exposta em ambas as resoluções, através da mobilização e da execução perspicaz e eficiente (C3+) de conhecimento matemático adequado (C1+), bem como de procedimentos executados de forma simples e eficaz (C4+), que no seu todo garantem a compreensão do problema (C1+). O uso de representações adequadas (R1+) e devidamente relacionadas entre si (R2+) possibilitaram uma comunicação eficaz (R7+), através de linguagem icónica, simbólica e verbal (R3+), destacando, ao mesmo tempo, diferentes etapas de resolução melhor organizadas na resolução S9A7 (C7+) do que na resolução S10A7 (C7-), donde ressaltou a relação do conhecimento matemático com os dados (C2+). Na primeira etapa (a), é definida a estratégia de resolução, sendo a representação icónica basilar na resolução S10A7 (R5+), mas o mesmo não acontecendo com a representação tabular na resolução S9A7, que apenas corrobora o raciocínio que é explicado. Na segunda etapa (b), subjacente ao desenvolvimento da estratégia, está presente a noção de que a última chave testada é a chave certa, o que determina o número de tentativas a fazer para cada chave, sendo estabelecido um padrão numérico que permite solucionar o problema. No caso da resolução S9A7, o padrão numérico relativo ao número de tentativas falhadas para cada cadeado foi obtido a partir da sequência numérica, representativa dos 20 cadeados, registada numa das colunas da tabela. Posteriormente, a solução do problema é obtida com base no padrão numérico obtido, através da adição de todas as tentativas falhadas identificadas para cada cadeado. O cálculo de todas as tentativas dispostas numa expressão numérica que envolveu a aplicação das propriedades comutativa e associativa da adição. Na resolução S10A7, o processo de apropriação do padrão numérico foi mais perspicaz, dado que foi generalizado sem a necessidade de identificar todas as tentativas falhadas para cada caso, através de representações próprias sob a forma de esquemas (R4+).

Concluindo, na tabela 18 pode-se observar o registo das evidências da Fluência do Conhecimento Matemático e da Flexibilidade Representacional destacadas nas resoluções S9A7 e S10A7.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S9A7	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	**0**	**0**	+	+
S10A7	+	+	+	+	**0**	+	**-**	+	+	+	+	+	+	+

Tabela 18 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Síntese analítica das resoluções

A tabela 19 representa o registo integral das manifestações da criatividade detetadas nas 10 resoluções analisadas referentes ao problema 7 “Fechado a cadeado”, da fase de apuramento do SUB12 correspondente à edição 2012/13, de acordo com o referencial de análise adotado. Com base nos dados da tabela 19, foram construídos esquemas gráficos paralelepipédicos representativos de cada resolução para, de uma forma gráfica, permitir uma visão global da criatividade manifestada.

Indicadores	Originalidade (O)					Fluência/Proficiênca (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Novidade (N)					Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	N1	N2	N3	N4	N5	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1A7	+	-	+	-	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S2A7	+	-	+	-	-	+	-	+	+	0	+	+	+	-	-	0	+	-	-
S3A7	+	-	-	+	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S4A7	+	-	-	+	+	+	+	-	-	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+
S5A7	+	-	-	+	+	+	+	-	-	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+
S6A7	+	-	+	+	+	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+
S7A7	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+
S8A7	+	-	+	+	+	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	-	+	+	+
S9A7	+	-	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	0	+	+
S10A7	+	-	+	+	+	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	+	+	+	+

Tabela 19 - Evidências da criatividade nas resoluções do problema 7, edição 12/13

De acordo com os paralelepípedos tridimensionais representados na figura 6, a altura, o comprimento e a largura, correspondem à manifestação dos dezanove descritores considerados no referencial de análise, distribuídos pelas dimensões Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional.

Apesar de todas as resoluções terem sido consideradas invulgares em termos de Originalidade, verifica-se que a presença dos respetivos descritores não é homogénea em todas as resoluções. Em quase todas as resoluções verifica-se uma redução da respetiva altura, visível nos paralelepípedos pelo facto de os descritores N2, N3, N4 e N5, terem sido identificados com o símbolo – (menos) em várias soluções.

Em todas as resoluções, o descritor N2- esteve relacionado com o facto de as ideias que suportam as estratégias de resolução não serem de todo únicas. As diferenças residiram na forma como as ideias foram materializadas em cada situação. Relativamente ao descritor N3-, ele está implicado no uso de estratégias semelhantes nas resoluções S3A7, S4A7 e S5A7 para obter o número de tentativas falhadas, onde a diferença está nos processos de contagem para obter o padrão numérico e a sequência de números naturais, que adicionados permitem obter a solução do problema. No que diz respeito ao descritor N4-, justifica-se pelo facto de as resoluções S1A7 e S2A7 expressarem aspetos comuns do raciocínio utilizado. Ambas, partem de casos simples para decifrar o padrão numérico, sendo este expresso de forma exaustiva na primeira resolução e generalizado a partir de um número reduzido de casos na segunda. Por último, à solução S2A7 foi atribuído o parâmetro N5- em virtude da falta de clareza em explicar o modo de obter as novas tentativas falhadas a partir das conhecidas.

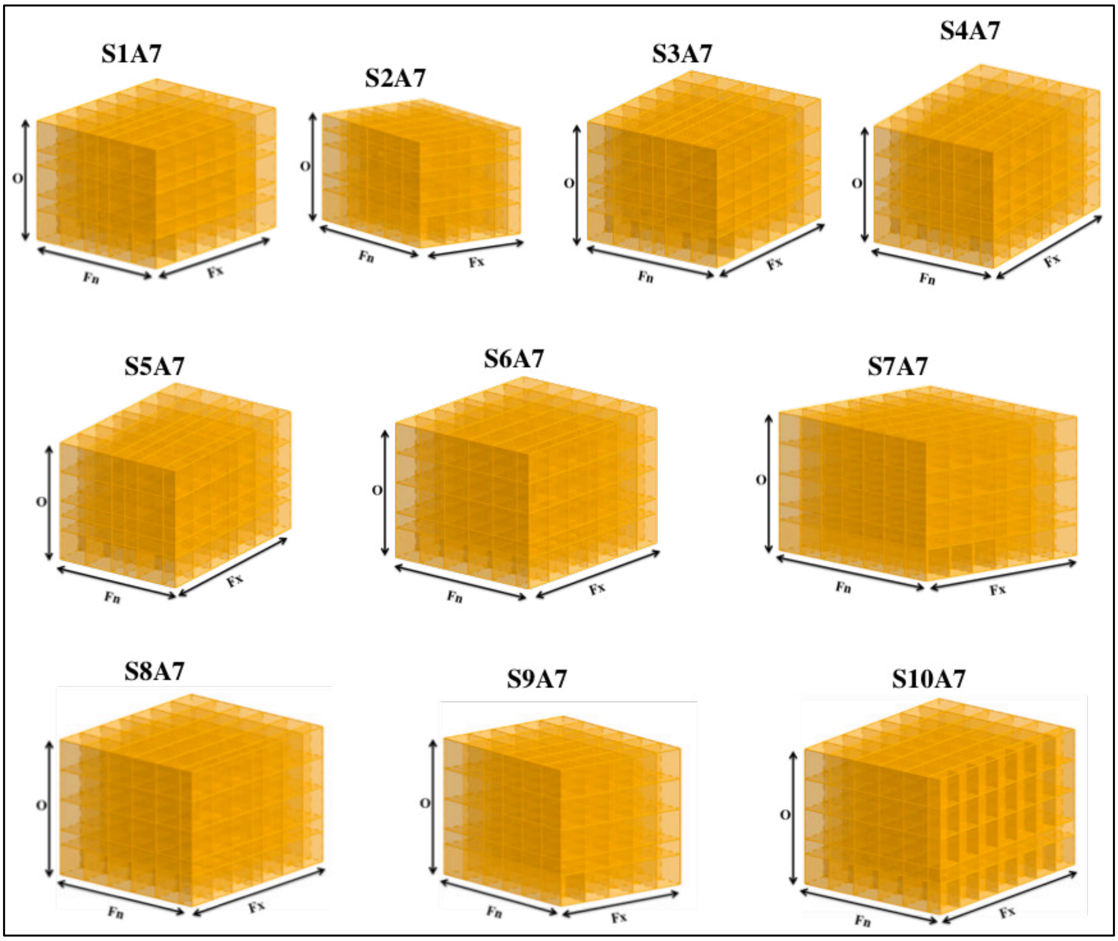


Figura 6 – Criatividade nas resoluções do problema 7, edição 12/13

Tomando em conta a Fluência do Conhecimento Matemático, a redução do comprimento dos paralelepípedos é justificada pela atribuição do símbolo – (menos) aos descritores C2, C3, C4 e C7 e do 0 (zero) ao descritor C5 em vária resoluções. O descritor C2- justifica-se na resolução S2A7 por esta revelar falta de clara articulação entre o conhecimento matemático e os dados e condições do problema, no momento de clarificar a obtenção das tentativas falhadas em cada linha a partir da linha anterior. Relativamente aos descritores C3- e C4-, associados às resoluções S1A7, S3A7, S4A7, S5A7, estes indiciam falta de simplicidade na execução do conhecimento matemático e dos procedimentos subjacentes, que consistiram na contagem exaustiva do número de tentativas falhadas. O valor 0 (zero) afeto ao descritor C5 foi motivado pela ausência de procedimentos próprios para aplicar o conhecimento matemático evocado em quase todas as resoluções, excetuando na resolução S7A7. E o descritor C7- refere-se às etapas de resolução não terem um sentido tão completo nas resoluções S4A7, S5A7, S6A7, S8A7 e S10A7 como nas restantes.

A largura, que é correspondente ao indicador Flexibilidade Representacional, encontra motivos para a sua redução na frágil visibilidade dos descritores R2, R3, R4, R6 e R7 detetada em várias resoluções e pela ausência dos descritores R4 e R5 detetada em algumas resoluções. No caso da resolução S2A7, a associação de todos os descritores mencionados traduz uma fraca interligação das representações usadas e implicadas na comunicação do raciocínio seguido, designadamente no momento de explicar a forma como foi gerado o padrão numérico para resolver o problema. Com exceção da resolução S10A7, o descritor R4- é consonante com a menor ocorrência de representações próprias nas resoluções S4A7, S5A7, S6A7, S7A7 e S8A7 e pela sua ausência nas restantes. Por último, o zero atribuído ao descritor R5 na resolução S9A7 indica a ausência de representações estratégicas.

Em resumo, parece ser possível dizer que a maior variabilidade da criatividade está relacionada com uma maior variabilidade da Fluência de Conhecimento e da Flexibilidade Representacional. Os exemplos das soluções S7A7 e S10A7 são bastante elucidativos, pela amplitude destas duas dimensões, embora seja de notar maior índice de Fluência na resolução S7A7 e maior índice de Flexibilidade na resolução S10A7. Em contraste, no caso da resolução S2A7, embora seja encontrado um certo grau de Fluência do Conhecimento Matemático na generalização do padrão numérico que permite resolver o problema, a redução da Flexibilidade representacional está relacionada com a frágil capacidade, em alguns momentos, de explicar a relação do conhecimento matemático com os dados. A frágil conexão entre as representações limitou a clarificação do raciocínio utilizado, enviesou a comunicação e teve consequências na expressão da criatividade. Portanto, como se pode reconhecer com esta resolução, a Flexibilidade Representacional é uma caraterística importante para a obtenção de produtos criativos, significativos e úteis (Silver, 1997).

No contexto destes 10 produtos, pode-se dizer que o domínio do conhecimento matemático e os procedimentos subjacentes, bem com a sua execução e aplicação eficiente e perspicaz, foi importante para projetar a Originalidade das resoluções, materializadas pela capacidade representacional, comprovável em S6A7, S7A7, S8A7 e S10A7. O ato criativo levou à geração de produtos distintos, processo no qual a originalidade é reconhecida como uma componente importante (Leikin, 2013). No entanto, a criatividade mini-c manifestada neste conjunto de resoluções é caraterizada por produtos únicos, que ganharam significado através do conhecimento mobilizado e utilidade das representações usadas, dado que a originalidade só por si não é suficiente para determinar resultados criativos (Runco & Jaeger, 2012). Neste problema, a Originalidade foi acompanhada pela capacidade de construir tabelas interpretativas dos problemas, como componente principal das estratégias de resolução usadas, bem como a habilidade de analisar e relacionar dados através delas, recorrendo à combinação de representações simbólicas, icónicas e verbais, revelando abordagens interessantes e próprias de quem as produziu (Preston & Garner, 2003). Sendo assim e de uma forma geral, a consistência da Originalidade nas resoluções parece ser influenciada pela intensidade da presença do indicador Fluência do Conhecimento Matemático.

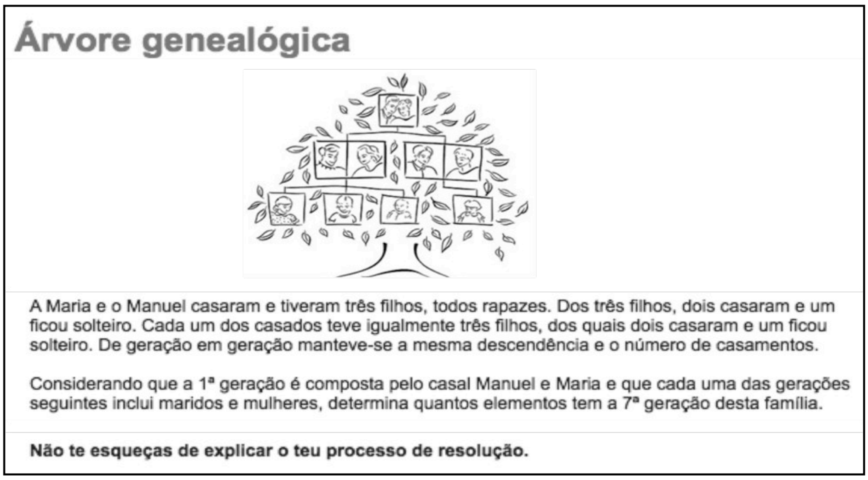
A Fluência é um componente crítico da criatividade que se prende com a proficiência do conhecimento matemático na resolução de problemas, permitindo a aplicação de métodos, estratégias e procedimentos com eficiência e precisão (NCTM, 2014). A forma como este indicador se destaca na caraterização da criatividade, traduzido pela ativação e uso de conceitos e procedimentos matemáticos potencialmente úteis, estrategicamente combinados e estruturados, bem como pela capacidade de expressar claramente o raciocínio matemático, tem reflexos evidentes no nível de criatividade. Esta evidência é confirmada em todas as resoluções e com maior consistência em S7A7 e S9A7, cuja eficiência corresponde à facilidade de resolução, sem perda do controlo dos processos escolhidos; e a precisão está relacionada com os aspetos da execução, entre eles, o registo cuidadoso e a análise das relações estabelecidas para obter a solução correta (NCTM, 2014). Ainda assim, a redução significativa da Flexibilidade Representacional parece ter reflexos na criatividade, independentemente da presença de uma elevada Fluência como se pode verificar na resolução S2A7. Portanto, a Fluência tem de estar em linha com os dois demais componentes para ser considerada um indicador de criatividade (Guerra, 2007), designadamente para garantir a aplicação adequada e interessante do conhecimento matemático.

A flexibilidade é uma caraterística que torna presente a variedade de opções para abordar um problema (Starko, 2009). Face ao problema analisado, a flexibilidade nota-se na adequação e conexão das representações matemáticas utilizadas, que permitem representar o conhecimento matemático e a sua relação com os dados de modo a permitir encontrar uma estratégia para resolver o problema. A Flexibilidade Representacional permite descrever a forma como as representações foram operacionalizadas, em cada caso, ajustando-se e adaptando-se aos propósitos do resolvedor, exprimindo e revelando os seus raciocínios e permitindo expô-los de forma clara. Para além da especificidade inerente a cada forma de representação, a flexibilidade está patente na adequação das representações utilizadas em cada resolução, revelando aptidões importantes na resolução de problemas matemáticos que envolvem a capacidade imaginativa e inventiva (Ainsworth, 1999; Benko & Maher, 2006). Neste enquadramento, a competência representacional está subjacente ao conhecimento que não é apenas armazenado, mas mentalmente representado e organizado (ligado e estruturado) de maneira a facilitar a sua recuperação e a sua aplicação adequada (NCR, 2001). Nomeadamente, o conhecimento adquirido, conjugado com a liberdade para pensar e construir representações, permitiu estabelecer ideias significativas, de modo a que o problema ganhasse sentido (Benko & Carolyn, 2006).

Em jeito de conclusão, as representações tridimensionais cúbicas expressas na figura 6 mostram uma variabilidade das evidências de criatividade nas 10 resoluções, que permite concluir que o ato matemático criativo assume um caráter heterogéneo numa competição inclusiva, que procura atrair e abranger uma larga diversidade de jovens alunos, com diferentes graus de aptidão e também níveis de desempenho académico na disciplina de matemática. Sendo assim, a criatividade mini-c ganha expressão na personalização das ideias que estão por detrás das estratégias escolhidas para atacar o problema, em cada caso, com base em raciocínios e formas de comunicação, ao mesmo tempo eficientes e mais ou menos singulares. As resoluções aqui presentes denunciam uma criatividade que se revela num produto criativo que é útil (o objetivo de encontrar a solução é atingido) e adequado (a criatividade está de acordo com a maturidade dos participantes). Qualquer uma das resoluções analisadas pode ser encarada como eficiente, ainda que umas tenham sido arquitetadas de modo mais exaustivo, o que traduz uma menor fluência do conhecimento matemático, e outras em que foi generalizado o padrão numérico que permitiu resolver o problema, recorrendo à adição dos sucessivos termos da sequência numérica. Desta forma, a criatividade não se pode reduzir à originalidade, uma vez que esta não é suficiente para qualificar um produto de criativo. O que parece retirar-se dos resultados obtidos é que a originalidade de uma resolução não é indissociável da fluência de conhecimento matemático e da flexibilidade representacional. Ambos os indicadores são importantes para a interpretação e compreensão do problema, bem como para a construção e representação de raciocínios matemáticos interessantes, eficazes e invulgares.

4.2.3. Resoluções do problema 10 da edição 2011/12

Qualquer estratégia que permitisse inferir que a partir da segunda geração o número de elementos da seguinte seria o dobro da anterior, permitiria resolver corretamente o problema "Árvore genealógica", exposto na figura 7, que constituiu o problema 10 proposto na edição 2011/12 do campeonato SUB12. No entanto, para determinar o número de indivíduos por geração, independentemente da quantidade de casais, era fundamental ter em conta duas coisas: que o número de filhos rapazes seria sempre três, dos quais um nunca casaria e, consequentemente, a razão entre o número de mulheres e o número de homens seria uma razão de dois para três.


Árvore genealógica

A Maria e o Manuel casaram e tiveram três filhos, todos rapazes. Dos três filhos, dois casaram e um ficou solteiro. Cada um dos casados teve igualmente três filhos, dos quais dois casaram e um ficou solteiro. De geração em geração manteve-se a mesma descendência e o número de casamentos.

Considerando que a 1ª geração é composta pelo casal Manuel e Maria e que cada uma das gerações seguintes inclui maridos e mulheres, determina quantos elementos tem a 7ª geração desta família.

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 7 – Problema 10, edição 2011/12

A escolha do conjunto de 10 resoluções deste problema, com o intuito de descrever a manifestação da criatividade na resolução de problemas do SUB12, prendeu-se com a representação esquematizada, em cada caso, do raciocínio dedutivo utilizado para solucionar o problema. As resoluções em causa são distintas entre si, não apenas no seio da amostra, mas também no universo de todas as respostas que foram elaboradas e enviadas para a organização do SUB12, durante a respetiva fase de apuramento, no período em que era solicitado resolver o problema em questão. A particularidade de cada resolução foi marcada pela simbiose entre os raciocínios implicados e as estratégias que os suportaram, sendo igualmente evidentes os processos mentais envolvidos que surgem exteriorizados a partir das representações selecionadas.

De seguida, será feita, em duas fases, a descrição das evidências da criatividade detetadas neste conjunto de resoluções, em termos da codificação dos dezanove descritores definidos no referencial de análise, primeiro para caraterizar a originalidade e posteriormente para descrever a manifestação concomitante da Fluência do Conhecimento Matemático e da Flexibilidade Representacional.

Evidências de Originalidade

Em termos de Originalidade, a análise feita às 10 resoluções (Anexo 3) indica produtos eficazes e invulgares (N1+), uma vez que refletem, em cada caso, soluções corretas e únicas.

A comunicação singular e objetiva (N5+) das resoluções S1B10, S3B10 e S6B10, concebidas a partir de ideias incomuns e portadoras de significado (N2+), desvendam o recurso a estratégias ímpares (N3+), bem como a manifestação de formas de raciocínio perspicazes e distintas (N4+). Ao observarmos a resolução S1B10, a ideia subjacente ganhou corpo através de uma tabela na qual foram relacionados os dados mais importantes, fornecidos no enunciado do problema, para determinar o número de indivíduos da 7.ª geração. Com sentido oportuno e perspicaz, foi construído um esquema genealógico personalizado (revelador da simetria da árvore genealógica) e representativo da descendência do Manuel e da Maria até à sexta geração, a partir de apenas um dos filhos casadoiros, o que levou à relação obtida na tabela, que distingue entre "noras" e "filhos", revelando assim a composição de cada geração e permitindo responder à questão colocada corretamente. Perante a resolução S3B10, a ideia que espoletou todo processo de resolução foi estrategicamente retratada num esquema genealógico e representativo da descendência do Manuel e da Maria, que a partir da quarta geração permitiu perceber que o número de elementos da geração seguinte era o dobro da anterior e, desta forma, solucionar o problema com eficácia. Relativamente à resolução S6B10, a ideia que esteve na génese de todo o processo de resolução materializou-se num esquema genealógico próprio devidamente legendado e representativo do números de elementos das três primeiras gerações, cuja sagacidade permitiu detetar, a partir da 4.ª geração, que o número de elementos em cada uma era sempre o dobro da anterior e, desta forma, solucionar o problema corretamente.

Face às resoluções S2B10 e S5B10, deparamo-nos com ideias semelhantes (N2-) manifestadas através de estratégias idênticas (N3-). As diferenças são destacadas pelas formas de raciocínio distintas implicadas em cada caso, que possibilitaram generalizar o número de indivíduos da 7.ª geração a partir da 4.ª, na resolução S2B10 (N4+), e na resolução S5B10 exibindo um processo de contagem mais exaustivo para obter a solução correta (N4-). Em ambos os casos, embora os processos de comunicação sejam distintos, falta objetividade à solução S2B10 e mais clareza à resolução S5B10 (N5-), designadamente pela falta de clarificação das abreviaturas utilizadas (que todavia se podem pressupor a partir do enunciado).

As resoluções S4B10 e S9B12, comunicadas de forma distinta, com maior objetividade na segunda (N5+) e menor na primeira (N5-), embora sejam consideradas distintas entre si e no seio da amostra (N1+), destacam ideias (N2-), estratégias (N3-) e formas de raciocínios (N4-) semelhantes, identificados noutras soluções no universo de todas as que foram desenvolvidas e enviadas para o SUB12, na respetiva fase de apuramento. Na resolução S4B10 é patente o recurso a um esquema genealógico representativo da descendência do Manuela e da Maria, no qual cada geração é destacada com cores e o respetivo número de indivíduos é codificado através de um código alfanumérico. De acordo com a resolução, a forma de raciocinar denota alguma falta de clareza, particularmente, na relação estabelecida entre os códigos alfanuméricos para gerar as adições de produtos iguais representativas do número de elementos de cada uma das sete gerações. Embora a resolução não o tivesse explicitado, o modo como os cálculos foram efetuados revelaram uma lei de formação para o número de elementos da n-ésima geração que corresponde a $2^n + 2^{n-2}$. No entanto, este processo possibilitou perceber, logo na segunda geração, que o número de elementos de cada uma das gerações seguintes era obtido multiplicando o número de indivíduos da geração anterior por dois, permitindo, de modo perspicaz, calcular número de elementos da 7.ª geração. Já na resolução S9B10 observa-se a representação esquemática do raciocínio utilizado para determinar o número de elementos pertencentes a cada geração e, com engenho, calcular de forma semelhante à da resolução anterior (a soma de duas potências de 2) o número de elementos pertencentes à 7.ª geração.

A ideia com significado que sustentou a resolução S7B10, foi considerada incomum no seio da amostra, mas revela semelhanças quando comparada com o universo de todas as resoluções que foram enviadas para o SUB12, na respetiva fase de apuramento (N2-). Apesar de uma estratégia adequada e singular (N3+), que suportou um raciocínio invulgar e perspicaz (N4+) responsável pela generalização da lei de formação a partir da 4.ª geração, a comunicação é relativamente pobre e não oferece de forma clara e distinta uma argumentação sólida para a duplicação do número de elementos de geração em geração (N5-).

As resoluções S8B10 e S10B10 são distinguidas por ideias significativas e incomuns (N2+), projetadas através de estratégias adequadas e singulares (N3+), que se revelaram fundamentais para a expressão invulgar e perspicaz do raciocínio subjacente, com maior clareza na primeira (N4+) do que na segunda (N4-). Na resolução S8B10, nota-se a concretização de uma ideia estruturada por etapas determinadas pelo número de gerações implicadas, através das quais é evidente o raciocínio manifestado para calcular o número de indivíduos pertencentes a cada geração e consequentemente determinar o número de elementos correspondentes à 7.ª geração descendente do Manuel e da Maria. Nesta resolução observa-se a exaustividade da respetiva forma de representação, que apesar de distinta, careceu de consistência ao ser comunicada, dado que a explicação final do modo de cálculo (duplicar 5 vezes o número de elementos da 2ª geração) parece divergente com o modo como as várias gerações foram calculadas (soma de casais com solteiros) (N5-). Já na resolução S10B10, a ideia alicerce revelou-se numa tabela na qual foram relacionados os dados do enunciado para identificar o número de indivíduos pertencentes às primeiras 4 gerações para, com base num processo de raciocínio próprio, obter a solução correta do problema. Nesta resolução, embora tenha sido comunicado de forma distinta, não foi clarificado o raciocínio utilizado para calcular o número de elementos das quatro primeiras gerações registadas na tabela (N5-).

A tabela 20 foi construída com o intuito de permitir uma visão fácil e imediata da codificação dos descritores relacionados com o indicador Originalidade, resultante da aplicação do referencial de análise usado neste estudo, para analisar a manifestação da criatividade neste conjunto de soluções.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S1B10	+	+	+	+	+
S2B10	+	-	-	+	-
S3B10	+	+	+	+	+
S4B10	+	-	-	-	-
S5B10	+	-	-	-	-
S6B10	+	+	+	+	+
S7B10	+	-	+	+	-
S8B110	+	+	+	+	-
S9B10	+	-	-	-	+
S10B10	+	+	+	-	-

Tabela 20 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

A relação estabelecida entre a Fluência e a Flexibilidade traduz a compreensão do problema em todas as resoluções (C6+), devidamente fundamentada, em cada caso, através de representações adequadas (R1+) e de conhecimento matemático mobilizado apropriadamente para obter a solução (C1+).

O processo de raciocínio utilizado nas resoluções S1B10, S2B10, S3B10, S6B10, S8B10 e S9B10 é explicitamente revelado pelas formas de representação documentadas (R6+), que confirmam a execução eficiente e perspicaz do conhecimento matemático (C3+), bem como a simplicidade e eficácia dos respetivos procedimentos desencadeados (C4+). A sintonia do conhecimento matemático com os dados (C2+), documentada e estruturada por etapas estrategicamente organizadas (C7+), de forma menos verbalizada na solução S9B10 (C7-), percebe-se claramente pela ligação das representações utilizadas (R2+), provenientes de diferentes sistemas representacionais eficazmente interligados por linguagem verbal (R3+). Na resolução S1B10, a primeira etapa é marcada pela escolha do processo utilizado centrado numa tabela estratégica (R5+) constituída por quatro colunas, onde foram identificados e registados os dados mais importantes do problema, e por sete linhas correspondentes ao número de gerações indicadas no enunciado. Na segunda etapa observa-se a execução da estratégia selecionada através da tabela que a suporta, na qual é visível o recurso à multiplicação para calcular, por geração, na primeira coluna o número de indivíduos femininos, na segunda coluna o número de elementos masculinos e na terceira coluna a soma dos valores obtidos. Na terceira etapa, e com sentido complementar, é construído um esquema geracional, a partir de um dos filhos casadoiros do Manuel e da Maria, que revela a relação estabelecida entre os dados do enunciado e a consequente operacionalização dos mesmos na tabela construída para determinar o número de elementos da 7.ª geração. Ainda que o esquema geracional tenha sido construído através de representações próprias, as mesmas não foram consideradas especialmente pertinentes (R4-) por não terem sido determinantes para resolver o problema, mas apenas para reforçar o que a tabela já transparecia. Na última etapa é registada a resposta à questão levantada no enunciado. Todo o processo de resolução foi comunicado de forma organizada e perspicaz, sem levantar quaisquer dúvidas a quem dele se queira apropriar (R7+).

Face às resoluções S2B10 e S3B10, embora à primeira vista pareçam semelhantes, elas são distintas uma da outra, particularmente ao nível da estratégia e do raciocínio usado em torno do esquema genealógico que possibilitou inferir que o número de elementos da geração seguinte era o dobro do da anterior. Na resolução S2B10, todo o processo é comunicado com nitidez, mas com alguma falta de perspicácia, patente na descrição exaustiva e densa do processo de resolução (R7-): a primeira etapa é diferenciada pela escolha de um esquema genealógico estratégico para a execução de todo o processo de resolução (R5+). Na segunda etapa é distinguida a relação entre os dados e condições do enunciado, através do esquema construído até à quarta geração, no qual o filho que não casou foi identificado com número 1 e os que casaram com o número 2 para contabilizar a respetiva esposa. Na terceira etapa, é descrita a relação encontrada a partir do esquema construído e que permitiu compreender que o número de elementos da geração seguinte era o dobro da anterior, recorrendo à expressão numérica definida na terceira geração. Encontrado o padrão que determina o número de indivíduos da geração seguinte com base no dobro da anterior, na quarta etapa é determinado o número de elementos da 7.ª geração recorrendo a multiplicações sucessivas. A última etapa é marcada pelo registo da solução. No caso da resolução S3B10, o processo de resolução é estruturado por três fases, comunicadas de forma organizada e perspicaz (R7+). A primeira fase é constituída pela construção de um esquema representativo das primeiras quatro gerações descendentes do Manuel e da Maria, no qual e em cada geração, supostamente, o número 1 representa o filho que não casou, o número 2 indica o número de mulheres e o número 3 o número total de indivíduos do sexo masculino, incluindo o filho que não casou (R5+). Posteriormente, na segunda fase é executada a estratégia escolhida, que reflete um procedimento próprio (C5+) para calcular o número de elementos pertencentes a cada geração, adicionando apenas o número de mulheres com o número total de homens. De fora fica o número 1, que supostamente apenas serviu para representar o filho que não casou e que está incluído no número 3 para efeitos de contagem de indivíduos por geração. Na terceira fase é explicado porque não foi preciso esquematizar as 7 gerações, dado que a partir da 4.ª foi intuído que o número de elementos da geração seguinte era o dobro da anterior. Na última fase foi registada a solução.

No caso da resolução S6B10, a ligação das representações usadas permitiu uma comunicação perspicaz e organizada (R7+) em três etapas: a primeira é marcada pela escolha da estratégia utilizada, centralizada num esquema estratégico (R5+) construído com representações próprias (R4+) e devidamente legendado, que reflete a relação dos dados até à quarta geração descendente do Manuel e da Maria; na segunda etapa, a operacionalização da estratégia escolhida salienta um procedimento próprio (C5+) para calcular o número de elementos em cada geração em função do esquema construído que permitiu compreender que o número de elementos de cada geração posterior era obtido multiplicando o número de elementos da geração anterior por 2; na terceira etapa foi registada corretamente a solução do problema.

A comunicação organizada e perspicaz (R7+) da resolução S9B10, numa única etapa de resolução, foi possível devido à forma como as representações simbólicas foram combinadas. A clareza do raciocínio utilizado para chegar ao número de elementos, geração a geração, mostra o recurso a expressões numéricas alinhadas e de uma regra para calcular o número de indivíduos de cada uma das 7 gerações descendentes do Manuel e da Maria, combinando multiplicação e adição: primeiro para calcular o número de elementos que casaram e depois adicionar o número de filhos solteiros. O resultado da última expressão numérica permitiu obter a resposta correta à questão do problema.

A resolução S4B10 assenta num procedimento estrategicamente estruturado e organizado em várias etapas de resolução (C7+). Primeiro, foram identificados e destacados os dados mais importantes. Posteriormente, foi definida a estratégia de resolução focada na construção de um esquema estratégico (R5+), no qual foram identificadas as sete gerações descendentes do Manuel e da Maria, cada uma destacada com cores e com códigos alfanuméricos próprios e pertinentes (R4+). De seguida, em resultado da operacionalização da estratégia selecionada, foi calculado o número de elementos pertencentes a cada geração, através de expressões numéricas geradas a partir do esquema geracional construído. Consequentemente, o modo como a estratégia foi executada possibilitou inferir que a partir da 2.ª geração o número de elementos das gerações seguintes correspondia sempre ao dobro dos elementos da geração imediatamente anterior. A este processo, ainda que tenha sido comunicado de forma organizada, faltou-lhe uma certa perspicácia (R7-), uma vez que as representações mobilizadas nem sempre traduziram explicitamente o raciocínio manifestado (R6-). Nomeadamente, as representações simbólicas e numéricas, provenientes de diferentes sistemas de representação (R3-), usadas para traduzir a relação estabelecida entre os dados no esquema construído, não traduziram explicitamente (R2-) a forma como foi obtida a resposta (C2-), ignorando aparentemente as relações numéricas que permitiram calcular o número de indivíduos em cada geração. Além disso, apesar de o conhecimento matemático evocado ter sido eficaz, faltou-lhe perspicácia (C3-) uma vez que a aplicação exaustiva de procedimentos de cálculo que combinavam multiplicações e adições parecem ter-se revelado irrelevantes para a obtenção do resultado final (C4-). As expressões numéricas geradas para determinar o número de elementos em cada geração mostraram-se desnecessárias, já que os mesmos resultados poderiam ter sido obtidos através da duplicação do número de elementos obtido na geração anterior. Esta interpretação não é uma perceção do leitor, mas encontra-se registada na solução. Desta forma, a aplicação dos procedimentos implicados tornou-se dispensável.

No caso da solução S5B10, a falta de perspicácia e objetividade ao nível da comunicação (R7-) ditou um processo organizado em quatro etapas de resolução e pobres em informação (C7-), nas quais a frágil relação estabelecida entre as representações (R2-), simbólicas, visuais e verbais (R3-), obriga o leitor a um esforço acrescido para decifrar intuitivamente o raciocínio desenvolvido (R6-), bem como para perceber a sintonia entre o conhecimento matemático e os dados (C2-). A primeira etapa é marcada pela construção exaustiva de um esquema genealógico estratégico (R5+) representativo das sete gerações descendentes do Manuel e da Maria. No esquema é visível a representação repetida dos algarismos 1 e 2, deduzindo-se que o primeiro corresponde ao filho solteiro e segundo aos filhos que casaram. A segunda etapa, aparentemente, reflete uma execução pouco perspicaz do conhecimento matemático mobilizado (C3-), que implicou um procedimento de contagem exaustivo (C4-) do número de indivíduos de cada uma das primeiras 6 gerações. Esta dedução parece ganhar força na terceira etapa, na qual foi determinado o número de elementos da 7.ª geração recorrendo à operação de multiplicação que, à primeira vista, resultou da compreensão de que seria o dobro da contagem da geração anterior. A resposta à questão levantada no problema foi registada na quarta e última etapa.

No conjunto das resoluções S7B10 e S8B10, a sintonia do conhecimento matemático com os dados (C2+) é espelhada por via de representações eficazmente interligadas (R2+) e originárias de diferentes sistemas de representação (R3+). As representações mobilizadas na resolução S7B10 possibilitaram a sua comunicação perspicaz e organizada (R7+) estrategicamente numa única fase de resolução, que poderia ter assumido um sentido suplementar de clareza (C7-) se tivesse sido explicitado o raciocínio manifestado (R6-) para calcular o número de elementos da 7.ª geração a partir da 4.ª geração. Na resolução observa-se a execução eficiente e inteligente do conhecimento matemático (C3+), com base num procedimento próprio (C5+) simples e eficaz (C4+), a partir do qual foi calculado o número de indivíduos de cada uma das quatro primeiras gerações descendentes do Manuel e da Maria. O processo foi marcado pelo recurso a representações próprias (R4+), devidamente legendadas e organizadas num esquema aditivo estratégico para solucionar o problema, como se observa na representação da 4.ª geração (R5+).

Ao observar a resolução S8B10, facilmente são detetadas três fases de resolução estrategicamente estruturadas (C7+), a partir das quais as representações mobilizadas refletem explicitamente o raciocínio utilizado (R6+). Na primeira fase é lido o enunciado e retirados os dados mais importantes. Na segunda fase, a operacionalização da estratégia de resolução manifesta a execução eficiente e perspicaz do conhecimento matemático (C3+) usado para calcular o número de elementos de cada uma das 7 gerações procedentes do Manuel e da Maria, através de um procedimento aditivo simples e eficaz (C4+). Na terceira fase, antes de registar a solução correta, foi confirmado todo o processo de resolução através de uma expressão numérica que refletiu o procedimento executado na etapa anterior e que justifica o entendimento de que a partir da 2.ª geração o número de elementos das seguintes obtém-se com base no dobro do número de indivíduos da geração imediatamente anterior. Embora todo o processo de resolução tenha sido comunicado organizadamente, a sua representação exaustiva e pormenorizada retirou-lhe perspicácia e generalidade (R7-).

Por último, a forma como as representações foram utilizadas para comunicar organizadamente a resolução S10B10 em quatro etapas estrategicamente desenvolvidas (C7+), recorrendo a linguagem visual, simbólica e verbal (R3-), reflete igualmente alguma falta de capacidade de generalização (R7-), além de não traduzirem explicitamente o raciocínio efetuado para calcular o número de elementos em cada geração (R6-). Na primeira etapa, verifica-se a escolha da estratégia que reflete a ideia de usar uma tabela nitidamente adequada (R5+) para relacionar os dados mais importantes do enunciado (a ordem e o termo da sucessão). A segunda etapa compreende o registo do número de elementos de cada uma das primeiras quatro gerações na tabela construída, sem serem representados explicitamente (R2-) os procedimentos implicados (C4-) que possam traduzir a relação de sintonia entre o conhecimento matemático e os dados e condições do problema (C2-). Além disso, nesta resolução destaca-se um procedimento de cálculo bastante próprio (C5+) que acentua algum engenho na execução do conhecimento matemático, embora envolva um processo algo complexo que não se justifica verdadeiramente face ao pequeno número de iterações que ainda faltavam na tabela para chegar à 7.ª geração (C3-). Na quarta etapa é explicada a operacionalização do procedimento usado que levou ao cálculo do número de termos a separar a 4.ª geração da 7.º geração, e seguidamente ao uso desse número como expoente da potência de base 2, dado que esta era a constante multiplicativa geradora dos sucessivos termos. Contudo, apenas se pode pressupor, uma vez que não está explícito na resposta, que foi detetado que o número de elementos de cada uma das gerações seguintes era obtido com base no dobro do número de indivíduos da geração imediatamente anterior. Assim, tudo indica que o resultado da operação subtração representa as três últimas gerações e foi transportado para um produto de três fatores iguais (2x2x2) a ser multiplicado pelo número de elementos da 4.ª geração, de forma a calcular a solução correta do problema. Na última etapa foi regista a resposta.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S1B10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	**-**	+	+	+
S2B10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	**0**	+	+	**-**
S3B10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	**0**	+	+	+
S4B10	+	**-**	**-**	**-**	**0**	+	+	+	**-**	**-**	+	+	**-**	**-**
S5B10	+	**-**	**-**	**-**	**0**	+	**-**	+	**-**	**-**	**0**	+	**-**	**-**
S6B10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S7B10	+	+	+	+	+	+	**-**	+	+	+	+	+	**-**	+
S8B10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	**0**	**0**	+	**-**
S9B10	+	+	+	+	**0**	+	**-**	+	+	+	**0**	**0**	+	+
S10B10	+	**-**	**-**	**-**	+	+	+	+	**-**	**-**	**0**	+	**-**	**-**

Tabela 21 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Face à tabela 21, é possível observar como se distribui a codificação dos descritores afetos à Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional, em resultado da aplicação do referencial de análise, para detetar as evidências da criatividade no conjunto das dez resoluções desta secção.

Síntese analítica das resoluções

A tabela 22 reúne sinteticamente a codificação dos 19 descritores definidos no referencial de análise, resultante do exame das 10 resoluções construídas para resolver o problema 10, "Árvore genealógica", selecionadas da fase de apuramento do SUB12, da edição 2011/12.

Indicadores	Originalidade (O)					Fluência (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Novidade (N)					Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	N1	N2	N3	N4	N5	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1B10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	-	+	+	+
S2B10	+	-	-	+	-	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	-
S3B10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S4B10	+	-	-	-	-	+	-	-	-	0	+	+	+	-	-	+	+	-	-
S5B10	+	-	-	-	-	+	-	-	-	0	+	-	+	-	-	0	+	-	-
S6B10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S7B10	+	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+
S8B10	+	+	+	+	-	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	0	+	-
S9B10	+	-	-	-	+	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	0	0	+	+
S10B10	+	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	0	+	-	-

Tabela 22 - Evidências da criatividade nas resoluções do problema 10, edição 11/12

Os paralelepípedos, constantes da figura 8, são representativos de cada uma das resoluções analisadas nesta secção e foram concebidos em função da codificação dos descritores que se encontra registada na tabela anterior, com o propósito de fornecer uma ideia global acerca da criatividade manifestada na resolução do problema em questão, resolvido no ambiente competitivo do SUB12, num momento em que muitos dos participantes alimentam a ambição de disputar a fase final do campeonato. Tal como já referido anteriormente, as dimensões altura, comprimento e largura representam a manifestação dos descritores indicados para examinar o fenómeno da criatividade, em termos dos indicadores considerados neste estudo: Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional.

Numa perspetiva de Originalidade, todas as resoluções foram consideradas distintas entre si no seio da amostra e no universo de todas as resoluções que foram construídas na décima jornada, para o problema proposto. De acordo com os paralelepípedos, excetuando nas resoluções S1B10, S3B10 e S6B10, a manifestação da originalidade foi variável nas restantes soluções devido à codificação dos descritores N2, N3, N4 e N5 com o símbolo – (menos).

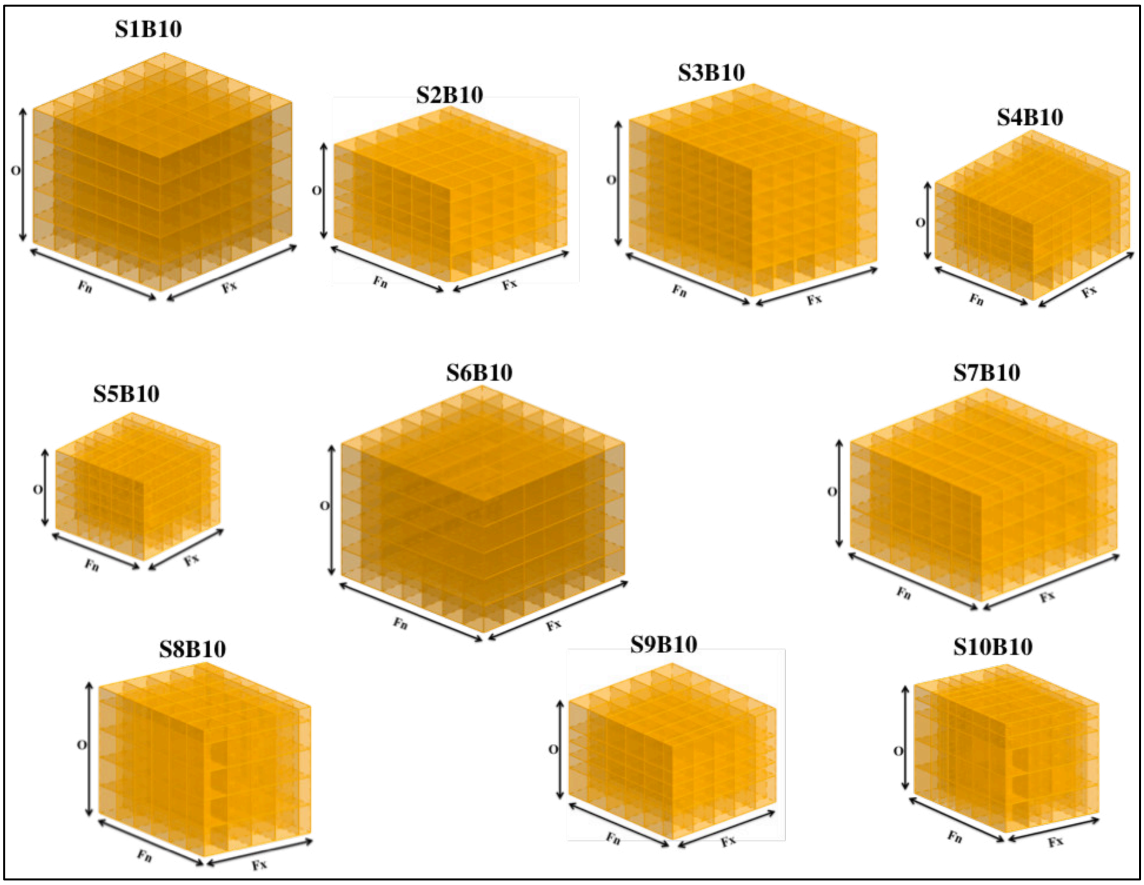


Figura 8 – Criatividade nas resoluções do problema 10, edição 11/12

O descritor N2- foi associado às resoluções S2B10, S4B10, S5B10, S7B10 e S9B10, devido às respetivas ideias subjacentes refletirem aspetos também identificados noutras soluções, tanto no seio da amostra como no conjunto de todas as resoluções do campeonato. No caso das resoluções S2B10 e S5B10, ambas assentam na construção de um esquema geracional semelhante. As resoluções S4B10 e S9B10 refletem ideias distintas no seio da amostra, mas semelhantes a outras detetadas no universo de todas as resoluções construídas para resolver o problema e enviadas para a equipa do SUB12: a primeira é suportada por um esquema genealógico estruturado com base em códigos alfanuméricos destacados com cores em cada uma das sete gerações; a segunda reflete um esquema genealógico estruturado por gerações no qual a relação estabelecida entre os dados é apoiada pelas operações combinadas de multiplicação e adição.

O sinal – (menos) ganhou força no descritor N3 em várias resoluções, por indiciarem estratégias semelhantes a outras. Nas resoluções S2B10 e S5B10 é visível o recurso estratégico ao número 2 para identificar os filhos que casaram e ao número 1 para representar o filho que não casou, com o intuito de calcular o número de elementos de cada uma das gerações descendentes. A resolução S4B10 denuncia uma estratégia semelhante a outra, ainda que fora da amostra selecionada, para obter a solução correta do problema através de adições de produtos de fatores iguais definidas para cada geração, a partir dos códigos simbólicos usados. No caso da resolução S9B10, a operacionalização da estratégia escolhida, parecida com outra fora do seio da amostra, refletiu a obtenção de uma expressão numérica em cada nível geracional representativa do respetivo número de indivíduos.

O descritor N4-, atribuído a várias resoluções, foi justificado por diferentes razões. Na resolução S5B10, denunciou uma aparente contagem exaustiva do número de indivíduos pertencentes a cada um das primeiras seis gerações para obter a resposta correta do problema, através da multiplicação da contagem obtida na 6.ª geração por dois. Nas resoluções S4B10 e S9B10, foi considerado, porque as mesmas, embora traduzindo formas de pensar distintas entre si, foram idênticas a outras identificadas no universo das que foram enviadas para o SUB12: o raciocínio manifestado na resolução S4B10, permitiu gerar a soma de dois produtos com estrutura semelhante (um para os elementos casados e outro para os solteiros), desde a 2.ª à 7.ª geração, a partir dos códigos simbólicos definidos em cada uma, para solucionar o problema corretamente; e na resolução S9B10 foram produzidas sequencialmente expressões numéricas, a última das quais permitiu determinar o número de indivíduos pertencentes à 7.ª geração e, assim, resolver o problema corretamente. E na resolução S10B10 ocorreu a mesma codificação devido à falta de explicação do processo de raciocínio utilizado para calcular o número de pessoas de cada uma das primeiras 4 gerações, registada na tabela geracional construída.

Perante o descritor N5, o sinal menos (-) ganhou consistência nas resoluções S2B10, S4B10, S7B10, S8B10 e S10B10 pela falta de objetividade ao nível da comunicação, por vezes associada à falta de clareza de alguns procedimentos implicados, como no caso da resolução S5B10 e identicamente da resolução S7B10.

Analisando a Fluência do Conhecimento Matemático, confirma-se a variabilidade do comprimento de vários paralelepípedos devido à atribuição do sinal menos (-) aos descritores C2, C3, C4 e C7 e a codificação do descritor C5 com o número 0 (zero) nas resoluções analisadas.

O descritor C2- foi atribuído às resoluções S4B10, S5B10 e S10B10 pelo facto de em determinados momentos não ser clara a sintonia do conhecimento matemático envolvido com o que era pedido no problema: na primeira, não é explícita a relação entre os códigos alfanuméricos e a forma de gerar a adição de dois produtos de fatores iguais; na segunda, não é explícita a correspondência atribuída aos números 1 e 2, permitindo apenas intuir que o primeiro corresponde ao filho solteiro e o segundo aos filhos casados; e na terceira, por falta de clareza dos procedimentos usados para obter o número de elementos das quatro primeiras gerações.

A justificação para a associação dos descritores C3- e C4-, em várias resoluções, é motivada pela falta de perspicácia na aplicação do conhecimento matemático, denunciada pela falta de simplicidade na aplicação dos procedimentos implicados. Na resolução S4B10, a adição de dois produtos de fatores iguais traduz uma forma exaustiva de registo e de cálculo do número de indivíduos em cada geração, quando bastava multiplicar por dois o valor da geração anterior. Na resolução S5B10, justifica-se pela forma também exaustiva de representação e de contagem mediante a qual foi determinado o número de elementos da 6.ª geração, que posteriormente foi multiplicado por dois para calcular o número de indivíduos da 7.ª geração. E na resolução S10B10, encontra motivo devido à forma complexa como foi determinado o número de elementos da 7.ª geração, pelo recurso desnecessário, e um tanto excessivo, à diferença entre a ordem da 4.ª geração e a da 7.ª geração que leva ao expoente da potência de 2 que é usada para calcular o último termo.

O algarismo 0 (zero) foi atribuído ao descritor C5 nas resoluções S1B10, S2B10, S4B10, S5B10, S8B10 e S9B10 devido à ausência de procedimento próprios, isto é, criados espontaneamente pelos alunos na resolução do problema.

Por último, o descritor C7- foi indexado às soluções S5B10, S7B10 e S9B10, devido ao facto de as respetivas etapas de resolução não revelarem um sentido tão estruturado e completo quando comparadas com as restantes.

A Flexibilidade Representacional, representada pela largura em cada paralelepípedo, apresenta-se variável em várias resoluções devido à codificação dos descritores R2, R3, R4, R6 e R7 com o sinal menos (-) e dos descritores R4 e R5 com o número 0 (zero).

O sinal menos (-) foi associado aos descritores R2, R3 e R6 nas resoluções S4A10, S5A10 e S10A10, porque as representações usadas não traduziram de forma inequívoca o modo como o conhecimento matemático foi associado ao problema, tal como aconteceu com o raciocínio usado em determinados momentos: na primeira resolução, não é explícita a relação efetuada entre os códigos alfanuméricos para obter a adição de dois produtos de fatores iguais que permitiu obter o número de elementos de cada geração; na segunda, não foi explicado o significado dos números 1 e 2 no esquema construído, levando a intuir que serviram para representar, respetivamente, o filho solteiro e os filhos que casaram; e na terceira não foi representado o procedimento utilizado para obter o número de elementos das quatro primeiras gerações representados na tabela construída. No caso da resolução S7B10, o descritor R6 foi o único codificado no sinal – (menos) por não ter sido registado o procedimento usado para obter o número de elementos até à 7.ª geração a partir da 4.ª geração.

O sinal menos (-) foi atribuído ao descritor R4 na resolução S1B10, indicando o uso de representações próprias que não foram consideradas pertinentes por terem sido apenas usadas para explicar a relação dos dados registados na tabela construída. Já a codificação com o símbolo zero (0) do mesmo descritor, nas resoluções S2B10, S3B10, S5B10, S8B10, S9B10 e S10B10, refere-se à ausência de representações próprias. Também a ausência de representações estratégicas para obter a resposta correta do problema, ditou a codificação do descritor R5 com o número zero (0) nas resoluções S8B10 e S9B10.

O uso do descritor R7- foi motivado por várias razões: nas resoluções S2B10, S4B10, S8B10 foi justificado pela falta de objetividade e pela exaustividade patente em cada uma; já nas resoluções S5B10 e S10B10 foi justificado pela falta de informação clarificadora dos raciocínios manifestados em vários momentos.

Perante a tabela 22, e os paralelepípedos da figura 8, neste conjunto de resoluções infere-se que a criatividade é nitidamente suportada pelo conhecimento matemático e a sua maior ou menor expressão é influenciada pela singularidade das resoluções e a capacidade de as representar. Pode verificar-se, em particular, que a amplitude mais reduzida na componente da fluência está presente nas soluções S4B10, S5B10, S9B10 e S10B10. Simultaneamente estas são as soluções em que o grau de criatividade parece afastar-se mais do potencial máximo.

De uma forma geral, uma maior presença da Fluência do Conhecimento Matemático implica uma maior manifestação da Originalidade e da Flexibilidade Representacional. Por exemplo, o resultado emergente da análise deste conjunto de resoluções, com base na aplicação do referencial de análise, mostra que as evidências da criatividade se destacaram com mais expressividade nas resoluções S1B10, S3B10, S6B10 e S7B10, dado que quase todos os 19 descritores foram codificados com o símbolo + (mais). Também nestas resoluções, verifica-se uma forte correlação entres os três indicadores estruturantes do fenómeno da criatividade considerados neste estudo. Nas restantes resoluções, embora não se verifique uma relação recíproca tão perfeita entre as três dimensões da criatividade, é visível que uma menor presença de uma das componentes implica, em regra, uma menor presença das outras.

Interessa explicar porque é que a resolução S10B10 foge um pouco à regra, porque embora tivesse sido distinguida com elevada Originalidade e Fluência do Conhecimento Matemático não apresentou uma elevada Flexibilidade Representacional. Nesta situação, apesar da ausência de representações próprias terem tido influência na redução da Flexibilidade, a principal razão deve-se à forma como as representações usadas foram interligadas, as quais não refletiram o procedimento usado para determinar o número de elementos das quatro primeiras gerações registadas na tabela geracional construída. Assim, o leitor é obrigado a fazer um esforço adicional para apenas inferir, sem ter a certeza, sobre o raciocínio manifestado e sem se apropriar verdadeiramente do processo efetuado. Desta forma, assume-se que a manifestação do fenómeno da criatividade, neste contexto, não depende apenas da execução singular do conhecimento matemático, mas também da forma como é representado. Enquanto que a Fluência é fundamental para a mobilização do conhecimento matemático necessário para resolver o problema, a Flexibilidade é responsável pela sua materialização e apropriação, pelo que ambas têm um papel significativo para a manifestação da criatividade.

Em suma, neste quadro de análise uma maior presença da Originalidade indicia aptidão para gerar ideias incomuns que permitiram perceber e definir o problema de forma diferente, notando coisas que os outros ignoraram, bem como a capacidade de expressão própria para representar o conhecimento mobilizado e assim produzir soluções únicas (Irish National Teachers' Organisation, 2009; Rostan, 2010). Em termos da Fluência do Conhecimento Matemático, a sua elevada presença refletiu: a capacidade para resolver o problema com eficiência e perspicácia, sem necessidade de muitas etapas e de procedimentos complicados e sem perda do controle da estratégia seguida; a precisão demonstrada na representação do conhecimento matemático evocado e das relações estabelecidas entre os dados mais importantes do problema; e a flexibilidade para reconhecer as estratégias e métodos adequados para resolver o problema e confirmar a solução (Russel, 2000). Portanto e de um modo geral, as resoluções refletem pensamentos criativos munidos de fluência e precisão matemática para resolver o problema, fazendo-o de forma original (Aizikovitsh-Udi, 2013), no contexto em que as resoluções são criadas e apresentadas. Por último, a Flexibilidade

Representacional assumiu um papel determinante nas evidências da criatividade manifestadas pelos participantes, dado que traduz resoluções construídas com base em representações estratégicas, matemáticas e não matemáticas, devidamente conectadas e oriundas de diferentes sistemas de representação interligados. Desta forma, uma elevada Flexibilidade destacou escolhas adequadas para representar soluções corretas do problema em foco, designadamente pela presença muito frequente de diagramas de árvore ou geracionais (Meyer, 2000; Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009); bem como de pensamentos criativos com clara relevância, que consistiram na capacidade de superar a rigidez de pensamento matemático e quebrar conjuntos mentais formatados (Haylock, 1997). Nomeadamente, as resoluções S1B10, S3B10, S6B10 e S7B10 destacaram o recurso a uma variedade de representações, com vários sentidos complementares, que permitiram resolver o problema de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009).

Por fim, este problema merece uma atenção particular no domínio das ferramentas representacionais que a ele surgem associadas. Se por um lado, os esquemas de árvores genealógicas fazem todo o sentido e parecem ser bem aproveitados pelos jovens para abordar a situação descrita, por outro, é de sublinhar que mesmo com esse recurso representacional em comum, as formas diversas e distintas com que as árvores são representadas e usadas é bastante evidente. Uma vez mais, à semelhança do que também se observou no problema das chaves e cadeados, em que a representação tabular era estratégica, percebe-se que ao considerarmos a criatividade c-pequeno, o uso de recursos representacionais pode assumir muitas *nuances* reveladoras de diferentes formas de pensar e exprimir o pensamento matemático e que esse uso diferenciado é portador e revelador de criatividade matemática (Preston & Garner, 2003).

Analogamente, o modo distinto como a fluência se converte em modos eficazes de lidar com regularidades numéricas e promove o cálculo aritmético de modos mais simples e mais diretos, mostra que a possibilidade de dispor de várias ferramentas matemáticas, como a ideia de sequência por duplicação dos termos ou a ideia de associatividade, para distinguir entre diferentes tipos de elementos nas várias gerações, se reflete nas variantes que surgem para obter a solução do problema. Como é referido por vários autores (Pattivisan & Niess, 2008; Sheffield, 2008; Silver, 1997), um dos desafios da resolução de problemas é o de permitir que a mesma situação seja abordada de diferentes formas, algo que parece nitidamente traduzir-se em cambiantes de criatividade matemática.

4.2.4. Resoluções do problema 9 da edição 2011/12

A resolução do problema "O Vírus do computador", apresentado na figura 9, foi o problema 9 proposto na edição 2011/12 e requeria uma estratégia que permitisse relacionar progressivamente, em cada dia, as partes do disco rígido afetadas e não afetadas pelo vírus, para determinar a dimensão do estrago ao longo dos quatro dias. Uma das formas de resolver este problema consistia em recorrer à multiplicação de frações, considerando os dados do enunciado para determinar a parte afetada pelo vírus em cada dia e, posteriormente, adicionar os produtos obtidos para calcular os estragos causados ao longo dos quatro dias.

O vírus do computador

O José teve esta semana um grande problema! O computador foi atacado por um vírus informático que foi ocupando espaço no disco rígido. No primeiro dia, o vírus ocupou 1/2 do espaço que estava livre no disco. No segundo dia, o vírus ocupou 1/3 do espaço que ainda ficou livre. No terceiro dia, ocupou 1/4 do espaço que ainda ficou livre. No quarto dia, ocupou 1/5 do espaço que ainda ficou livre.

Que fracção do espaço disponível no disco foi consumida pelo ataque do vírus nesses dias?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 9 – Problema 9, edição 11/12

No sentido de estudar o fenómeno da criatividade no quadro deste estudo, de acordo com o referencial de análise proposto para o efeito, a escolha das 10 resoluções analisadas esteve relacionada com as diferentes formas de raciocínio manifestadas que conduziram a diferentes formas de manipulação dos números racionais envolvidos para resolver corretamente o problema.

A descrição dos dados resultantes da análise das resoluções será efetuada em duas fases, de acordo com a codificação dos 19 descritores identificados no referencial de análise para descrever as dimensões a que estão associados. A primeira fase será dedicada à descrição das evidências da criatividade associadas à Originalidade. Na segunda fase, de uma forma combinada, será feita uma caraterização da Fluência do Conhecimento Matemático e da Flexibilidade Representacional verificada em todas as resoluções.

Evidências de Originalidade

No geral, todas as resoluções (ver anexo 4) revelaram-se eficazes e distintas (N1+), quando comparadas entre si, no conjunto da amostra, ou no universo de todas as resoluções do problema em questão, na respetiva fase de apuramento.

As resoluções S1B9 e S2B9 são marcadas por ideias significativas (N2-) e estratégias adequadas (N3-) idênticas, cujas diferenças são acentuadas pela comunicação distinta e objetiva utilizada em cada caso (N5+). Nas resoluções é visível o recurso a representações gráficas de figuras geométricas, divididas em parte iguais para determinar, em cada dia, a parte do disco rígido afetada pelo vírus a partir da parte ainda não afetada. No entanto, enquanto que o processo de raciocínio manifestado na resolução S1B9 foi considerado claro e invulgar (N4+), o mesmo não aconteceu com a solução S2B9, uma vez que, ainda que fora da amostra, foram detetadas outras formas de pensar semelhantes na totalidade das resoluções enviadas para o SUB12 (N4-). Na resolução S1B9, o processo de raciocínio é traduzido, progressivamente, por expressões numéricas representativas da parte afetada pelo vírus em cada dia, geradas a partir da relação estabelecida entre os dados, com base no esquema gráfico construído, em que o último retângulo dividido em partes exibe a solução correta. Tal como noutras situações, o procedimento mental envolvido na resolução S2B10 foi manifestado em duas fases: na primeira fase foram identificadas as partes do disco rígido danificadas pelo vírus em cada um dos quatro dias; na segunda fase foi obtida a resposta à questão levantada no problema, adicionando as partes identificadas na fase anterior.

Perante as resoluções S3B9 e S4B9, confirmam-se procedimentos espoletados por ideias significativas parecidas (N2-) e materializadas por via de estratégias adequadas e comparáveis (N3-). As diferenças são destacadas pelo uso de raciocínios distintos (N4+), bem como pela sua comunicação invulgar e objetiva em cada caso (N5+). Embora se verifique o recurso a tabelas para calcular em cada dia, simultaneamente, a parte do disco rígido afetada pelo vírus e a parte que ficou intocável, o modo de determinar a parte que não foi afetada é distinta nos dois casos. Enquanto que na resolução S3B9 a parte que não foi afetada, em cada dia, é obtida através da adição da parte afetada no próprio dia com a parte afetada no dia anterior, já na resolução S4B9, o mesmo resultado é obtido recorrendo à diferença entre a parte afetada pelo vírus e parte que não foi contagiada no próprio dia

Embora distinta (N1+), a resolução S5B9 é desprovida da clareza necessária para o leitor se apropriar integralmente do processo de resolução do problema (N5-). Na resolução, não é explícita a ideia que desencadeou todo o processo de resolução, nem a parte da estratégia operacionalizada para interpretar e relacionar os dados do problema de forma a traduzir com clareza o raciocínio conduzido para gerar a expressão numérica que permitiu resolver corretamente o problema.

Os formatos claros e objetivos de comunicar (N5+) as resoluções S6B9 e S9B9 revelam também uma analogia de ideias significativas utilizadas (N2-), de estratégias adequadas de resolução, mas ao mesmo tempo bastante singulares (N3-), e de formas claras de raciocínios (N4-) que, contudo, são comparáveis a outras no universo de todas as resoluções produzidas para resolver o presente problema e enviadas para a organização do SUB12. A resolução S6B9 revela o recurso a uma representação gráfica do disco rígido, cuja divisão em 60 avos resultou da determinação do mínimo múltiplo comum entre os denominadores das frações indicadoras da parte afetada pelo vírus em cada dia. No que diz respeito à resolução S9B9, o processo é marcado pelo recurso a percentagens, onde o disco rígido do computador antes de ser afetado pelo vírus é representado pela percentagem equivalente à unidade, a partir da qual são tratados os dados do enunciado para resolver corretamente o problema.

A comunicação clara e objetiva (N5+) das resoluções S7B9, S8B9 e S10B9 distingue ideias significativas incomuns (N2+), concretizadas através de estratégias de resolução adequadas e singulares (N3+), às quais foram explicitamente associados raciocínios ímpares que assentam na utilização de diferentes medidas (percentagens, ângulos e comprimentos) (N4+). Na resolução S7B9, é visível o recurso à noção de ângulo para resolver o problema, representando-se num gráfico circular as partes do disco rígido ocupadas pelo vírus em cada dia, de acordo com o enunciado do problema. No caso da resolução S8B9, o retângulo que corresponde ao disco rígido é dividido em 120 partes iguais, embora a explicação para a escolha deste número de divisões não seja dada. Por último, embora a resolução S10B9 seja comunicada distintamente, carece de objetividade (N5-), particularmente para traduzir claramente o raciocínio invulgar representado (N4-). De resto, trata-se de uma resolução eficaz e invulgar (N1+), cuja ideia incomum e significativa que a suporta é concretizada (N2+) através de uma estratégia adequada e singular (N3+). Na resolução S10B9 confirma-se o recurso a uma unidade de comprimento do sistema métrico para representar a dimensão de comprimento disco rígido, a partir da qual foram relacionados os dados indicados no enunciado, dando parcialmente a resposta à questão levantada no problema (uma vez que não foi comparado o comprimento da parte consumida com o comprimento total).

Na tabela 23 é refletida a codificação dos cinco descritores associados ao indicador Originalidade, emergente da análise das 10 resoluções produzidas para o problema "O vírus do computador", selecionadas e submetidas ao referencial de análise.

Indicador	Originalidade (O)				
Descritores	Novidade (N)				
	N1	N2	N3	N4	N5
S1B9	+	-	-	+	+
S2B9	+	-	-	-	+
S3B9	+	-	-	+	+
S4B9	+	-	-	+	+
S5B9	+	0	0	0	-
S6B9	+	-	-	-	+
S7B9	+	+	+	+	+
S8B9	+	+	+	+	+
S9B9	+	-	-	-	+
S10B9	+	+	+	-	-

Tabela 23 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

A interdependência verificada entre Fluência e Flexibilidade nas resoluções S1B9 S3B9, S4B9, S7B9 e S8B9 é confirmada pelo uso de representações adequadas (R1+) que traduzem de forma clara (R2+) o conhecimento matemático mobilizado (C1+) e a sua ligação pertinente com os dados (C2+). Em cada caso, a compreensão do problema (C6+) implicou o recurso a diferentes sistemas de representação interligados eficazmente (R3+), através de linguagens verbal, icónica/visual e simbólica, que permitiram a estruturação e comunicação perspicaz (R7+) do conhecimento matemático envolvido por etapas organizadas estrategicamente (C7+). A resolução S1B9 é construída em três etapas a partir de representações estratégicas eficazes (R5+), que suportam a execução eficiente e perspicaz do conhecimento matemático (C3+), bem como a aplicação simples e eficaz dos procedimentos comprometidos (C4+). Na primeira etapa, verifica-se o recurso a representações gráficas como estratégia para resolver o problema. A segunda etapa é marcada pela operacionalização de uma estratégia, onde o raciocínio mobilizado é explicitamente traduzido pelas representações utilizadas (R6+). São geradas expressões numéricas a partir das representações gráficas do disco rígido do computador, construídas para distinguir em cada um dos quatro dias a fração ocupada pelo vírus da porção que não foi afetada. As expressões numéricas geradas para calcular a parte do disco ocupada pelo vírus em cada um dos quatro dias, refletem a adição da parte afetada pelo vírus no dia anterior com a fração da parte boa que fica infetada pelo vírus no respetivo dia. Assim, de uma forma progressiva, confirmou-se que o vírus infetou 4/5 do disco rígido do computador durante todo o período. Na etapa final, foi registada a resposta correta do problema. As resoluções S3B9 e S4B9, foram construídas em pelo menos três etapas, que não foram distinguidas visualmente por terem sido desenvolvidas numa tabela estratégica, visando organizar os cálculos a realizar (R5+), em torno das quais foi operacionalizado o procedimento que consistiu em determinar, separadamente, e ao mesmo tempo, a parte do disco rígido infetada pelo vírus e a parte não ocupada em cada um dos quatro dias. As representações utilizadas refletiram explícita e integralmente as formas de raciocínio manifestadas em cada caso (R6+), nos quais é evidente a execução perspicaz e eficiente do conhecimento matemático (C3+). Apesar de parecerem análogas, as duas resoluções são distintas uma da outra, particularmente ao nível da execução do conhecimento mobilizado e da aplicação simples e eficaz do conhecimento matemático processual implicado (C4+). No caso da solução S3B9, verifica-se o envolvimento da multiplicação e adição de frações, para progressivamente responder corretamente à questão levantada no enunciado do problema. No sentido horizontal da tabela construída com cinco colunas, nas células superiores, a multiplicação permitiu calcular a parte infetada pelo vírus a partir da parte que não foi infetada em cada dia; e a adição possibilitou determinar progressivamente a soma acumulada das partes infetadas pelo vírus ao longo dos quatro dias. Nas células inferiores, foram registadas as frações irredutíveis do disco rígido não ocupadas pelo vírus, deduzidas das somas obtidas nas células superiores. O fim da resolução é indicado com o registo da resposta. Já na resolução S4B9, o procedimento é executado numa tabela com três colunas, onde, no sentido vertical: a primeira serve para identificar os dias; na segunda coluna são determinadas as partes do disco rígido infetadas pelo vírus em cada um dos quatro dias, através do produto da parte boa do disco pela fração que indica a parte afetada pelo vírus em cada dia; e na terceira é obtida a parte que não foi afetada pelo vírus em cada um dos dias, recorrendo à diferença entre a fração que representa a parte ainda não afetada no dia anterior e a parte que foi afetada no respetivo dia. No final, a resposta é obtida com base no cálculo da diferença entre a totalidade dos disco e a fração que representa a parte boa do disco. A conjugação das representações usadas para estruturar, em quatro fases de resolução, todo o processo utilizado na solução S7B9, para além de traduzir eficientemente a execução perspicaz do conhecimento matemático (C3+), também permitiu o acesso explícito a todo o raciocínio manifestado para resolver corretamente o problema (R6+). Na primeira fase, é escolhida a estratégia, centrada na representação do disco rígido do computador através de um gráfico circular como representação essencial e estrategicamente escolhida (R5+), consonante com a ideia de ângulo giro. Na segunda etapa, a operacionalização da estratégia escolhida salienta um procedimento próprio centrado no gráfico circular, através do qual foram compatibilizadas as noções de ângulo e de fração, para determinar em graus as partes do disco rígido infetadas pelo vírus em cada um dos quatro dias e, consequentemente, destacar no gráfico os correspondentes sectores circulares. Na terceira fase, as medidas de amplitude representativas das partes ocupadas pelo vírus em cada um dos quatro dias, obtidas na fase anterior, foram adicionadas numa expressão numérica, cujo resultado foi dividido pela medida de amplitude do ângulo giro para determinar a percentagem total do disco infetada nos quatro dias e consequentemente a percentagem do disco que não foi ocupada. O procedimento aplicado para obter a percentagem a partir da divisão efetuada foi simbolicamente mal representado, pois a cadeia de igualdades 288:360 = 0,8x100 = 80% não é correta (C4-). Embora o raciocínio que presidiu às representações numéricas seja possível de entender, demonstra uma lacuna no conhecimento processual implicado. Na última fase foi registada a reposta correta nas formas de percentagem e de fração. No caso da resolução S8B9, revelada em cinco etapas de resolução, as representações usadas traduzem claramente todo processo de raciocínio utilizado (R6+) em torno de uma representação gráfica estratégica do disco rígido do computador (R5+), que impulsionou a execução eficiente e perspicaz do conhecimento matemático mobilizado (C3+), através de processos simples e eficazes (C4+). A estratégia escolhida na primeira fase é suportada pela ideia de divisão gráfica do disco rígido em 120 partes iguais. A segunda fase consistiu na exploração da estratégia selecionada, que consistiu em destacar com cores na representação gráfica as partes infetadas pelo vírus em cada um dos quatro dias, de acordo com as frações indicadas no enunciado do problema. Na terceira fase foi identificada a parte do vírus que não foi infetada, representada pela fração irredutível correspondente aos quadradinhos que não foram pintados no gráfico retangular. A resposta correta à questão levantada no enunciado do problema foi obtida subtraindo a parte que não foi infetada pelo vírus à unidade representativa do disco rígido do computador. Na última etapa foi registada a solução correta.

Sobre as resoluções S2B9 e S6B9, a ligação da Fluência com a Flexibilidade ganha relevo graças à conjugação das formas de representação usadas adequadamente (R1+), que traduzem a mobilização apropriada do conhecimento matemático (C1+) em perfeita sintonia com os dados (C2+) e permitem a apropriação de todo o processo de raciocínio manifestado em cada caso (R6+). Nas duas resoluções, os processos seguidos refletem a compreensão do problema (C6+) que foi comunicado com maior perspicácia e objetividade na solução S2B9 (R7+) do que na S6B9 (R7-) e visualmente melhor organizado em etapas estratégicas na primeira (C7+) do que na segunda (C7-). Considerando a resolução S2B9, na primeira etapa foi selecionado um método de resolução suportado por representações gráficas estratégicas (R5+) da parte do disco rígido infetada pelo vírus, em cada um dos quatro dias. Na segunda etapa, fruto da relação estabelecida entre as frações indicadas no enunciado e os esquemas gráficos construídos, foram determinadas as partes infetadas pelos vírus em cada um dos 4 dias. Neste processo, as representações utilizadas, verbais, icónicas e simbólicas, nem sempre foram rigorosamente interligadas (R3-) e por tal dificultaram no imediato a confirmação da pertinência do conhecimento matemático mobilizado (R2-). Esta realidade comprometeu a execução perspicaz do conhecimento matemático (C3-) e a aplicação dos procedimentos implicados (C4-) pela falta de rigor verificada na divisão equitativa das representações gráficas indicativas das partes afetadas pelo vírus em cada um dos quatro dias; e na execução das operações envolvidas para determinar a parte infetada pelos vírus nos 3.º e 4.º dias, particularmente visível no processo para representar cada resultado através da respetiva fração irredutível. Na terceira etapa foi obtida a solução correta, através de uma expressão numérica que refletiu a adição das partes infetadas pelo vírus em cada um dos quatro dias.

Perante a resolução S6B9, a primeira etapa foi destinada à escolha da estratégia de resolução, que assentou na representação gráfica estratégica do disco rígido do computador (R5+), cuja divisão equitativa em 60 avos resultou do máximo divisor comum obtido a partir dos denominadores das frações indicadas no enunciado. Na segunda etapa, as representações verbais, icónicas, visuais e simbólicas, provenientes de diferentes sistemas de representação (R3+), foram usadas para explicar todo o procedimento utilizado para resolver corretamente o problema. Este processo refletiu a execução eficiente e perspicaz do conhecimento matemático (C3+) e a simplicidade dos processos implicados (C4+), devidamente enquadrados com os dados (R2+). No final, foi documentada a resposta correta à questão colocada no enunciado do problema.

Ao nível da Fluência e da Flexibilidade, apesar do conhecimento matemático ter sido mobilizado apropriadamente (C1+) e adequadamente representado (R1+) na resolução S5B9, as formas de representação usadas (R2-) obrigam o leitor a um esforço acrescido para confirmar a relação com os dados (C2-). Ainda que seja possível constatar a compreensão do problema (C6+), as duas etapas que estruturam a resolução não se revelaram estrategicamente (C7-) esclarecedoras do processo de raciocínio utilizado (R6-), bem como da pertinência do conhecimento matemático utilizado (C3-). Particularmente, não é visível como o procedimento efetuado (C4-) permitiu solucionar corretamente o problema. Ao nível da comunicação, o uso essencialmente de representações simbólicas para operacionalizar a estratégia escolhida e o recurso à linguagem verbal apenas para registar a resposta (R3-), não refletiram uma proposta de resolução objetiva nem perspicaz (R7-).

Na resolução S9B9, a dinâmica do binómio Fluência/Flexibilidade é comprovada pelas formas de representação utilizadas adequadamente (R1+), que compreendem a mobilização apropriada do conhecimento matemático (C1+) e a sua ligação perfeitamente contextualizada (R2+) com os dados do enunciado (C2+). Todo o processo foi estruturado em três etapas de resolução estrategicamente organizadas (C7+), as quais não levantam dúvidas quanto à compreensão do problema (C6+). Na primeira etapa, a escolha da estratégia indica a mobilização de percentagens para associar simbolicamente o disco rígido à unidade antes de ser infetado pelo vírus. Na segunda etapa, o espaço do disco infetado pelo vírus em cada dia foi determinado pelo quociente entre a parte boa que restou do dia anterior e a parte infetada no respetivo dia. A parte não ocupada pelo vírus após cada ataque diário foi determinada, subtraindo a parte infetada à parte boa antes de ser afetada no próprio dia. Neste processo, apesar de ser evidente uma aplicação perspicaz e eficiente dos conteúdos matemáticos evocados (C3+), as representações simbólicas e verbais nem sempre foram interligadas eficazmente (R3-) para representar rigorosamente os procedimentos implicados (C4-). Particularmente, não foram representados corretamente os resultados obtidos em várias operações. Além disso, o uso de vírgulas para distinguir as operações envolvidas, obriga a uma atenção redobrada para distinguir a divisão da subtração, dado que se confundem com as vírgulas dos numerais decimais envolvidos. Desta forma, ainda que as representações reflitam explicitamente o processo de raciocínio utilizado (R6+), a comunicação de todo o processo de resolução acusou uma certa falta de organização e perspicácia (R7-). Na última etapa, foi indicada a parte total do disco rígido infetado pelo vírus ao longo dos quatro dias.

Embora tenham sido mobilizadas as representações adequadas (R1+) para registar a interação da Fluência e da Flexibilidade manifestada na resolução S10B9, a frágil interligação das representações verbais e simbólicas usadas (R3+) nem sempre traduziram claramente (R2-) a aplicação eficiente e perspicaz do conhecimento matemático (C3+) mobilizado adequadamente (C1+), nem a sua consistência com os dados (C2+). Embora se comprove facilmente a compreensão do problema (C6+) devido à mobilização de conhecimento matemático apropriado (C1+), a falta de perspicácia ao nível da comunicação (R7-) limitou a sua estruturação em etapas estrategicamente organizadas (C7-). Na primeira etapa, a estratégia utilizada consistiu em recorrer às unidades de medida de comprimento do sistema métrico, mais especificamente ao centímetro, para representar simbolicamente o disco rígido do computador. Na segunda etapa, é visível a operacionalização de um procedimento próprio (C5+) para executar a estratégia escolhida, de modo a determinar a parte infetada pelo vírus em cada um dos dias indicados. O procedimento utilizado permitiu associar o comprimento de 12 cm a 100% do espaço desocupado antes da ação do vírus e resolver quase totalmente o problema. Neste processo, as representações usadas não refletem todo processo de raciocínio utilizado (R6-), uma vez que não é explícito o procedimento utilizado para obter o valor 9,6 cm equivalente a 4/5, valor que determina a parte infetada pelo vírus nos quatro dias. Na etapa final foi registada a resposta correta.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S1B9	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S2B9	+	+	-	-	0	+	+	+	-	-	0	+	+	+
S3B9	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S4B9	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S5B9	+	-	-	-	0	+	-	+	-	-	0	0	-	-
S6B9	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	0	+	+	-
S7B9	+	+	+	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S8B9	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S9B9	+	+	+	-	0	+	+	+	+	-	0	0	+	-
S10B9	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	0	0	-	-

Tabela 24 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade.

A tabela 24 resume sinteticamente a codificação dos 19 descritores alusivos às dimensões Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional, constantes do referencial de análise usado.

Síntese analítica das resoluções

Com base na aplicação do referencial de análise proposto neste estudo, na tabela 25 foram registadas as evidências da criatividade que emergiram do exame de 10 resoluções propostas na fase de apuramento do SUB12, da edição 2011/12, para resolver o problema "Vírus no computador".

Indicadores	Originalidade (O)					Fluência/Proficiênca (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Novidade (N)					Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	N1	N2	N3	N4	N5	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1B9	+	-	-	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S2B9	+	-	-	-	+	+	+	-	-	0	+	+	+	-	-	0	+	+	+
S3B9	+	-	-	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S4B9	+	-	-	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S5B9	+	0	0	0	-	+	-	-	-	0	+	-	+	-	-	0	0	-	-
S6B9	+	-	-	-	+	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	0	+	+	-
S7B9	+	+	+	+	+	+	+	+	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S8B9	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+
S9B9	+	-	-	-	+	+	+	+	-	0	+	+	+	+	-	0	0	+	-
S10B9	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	-	0	0	-	-

Tabela 25 - Evidências da criatividade nas resoluções do problema 9, edição 11/12.

Numa perspetiva gráfica, e em resultado da codificação dos 19 descritores registada na tabela 25, foram construídos os paralelepípedos da figura 10 representativos de cada uma das resoluções analisadas, com o intuito de oferecer uma visão genérica sobre a criatividade manifestada neste problema proposto no ambiente competitivo do SUB12. Em cada um dos paralelepípedos, a altura está associada à Originalidade, o comprimento representa a Fluência do Conhecimento Matemático e a largura indica a Flexibilidade Representacional.

Relativamente à Originalidade, a redução da altura observável em vários paralelepípedos é da responsabilidade dos descritores N2, N3, N4 e N5, os quais foram codificados com o sinal menos (-) em várias resoluções.

Os descritores N2- e N3- foram identificados nas resoluções S1B9, S2B9, S3B9, S4B9, S6B9 e S9B9, sendo justificados pelo recurso a ideias e estratégias parecidas, identificadas quer no seio da amostra, que no universo de todas as resoluções enviadas para a equipa do SUB12. Os mesmos descritores foram codificados com 0 (zero) na resolução S5B9 por não ser clara a ideia, nem a estratégia, que estiveram por detrás da obtenção da expressão numérica que permitiu resolver corretamente o problema, além de evidenciar um procedimento com caraterísticas comuns detetadas noutra resolução, no universo de todas as que foram construídas e enviadas para o SUB12 na respetiva fase de apuramento. As resoluções S1B9 e S2B9 assentam na ideia estratégica semelhante de representar graficamente o disco rígido do computador. Nas resoluções S3B9 e S4B9, é visível o recurso a tabelas para obter a solução correta. A solução S6B9 mostra uma ideia semelhante a outra detetada no universo de todas as resoluções que foram construídas na fase de apuramento. O processo é marcado pela mobilização do mínimo múltiplo comum entre os denominadores das frações representadas no enunciado do problema para representar graficamente a unidade dividida em 60 avos. E na resolução S9B9 é utilizada a noção de percentagem para representar o disco rígido do computador.

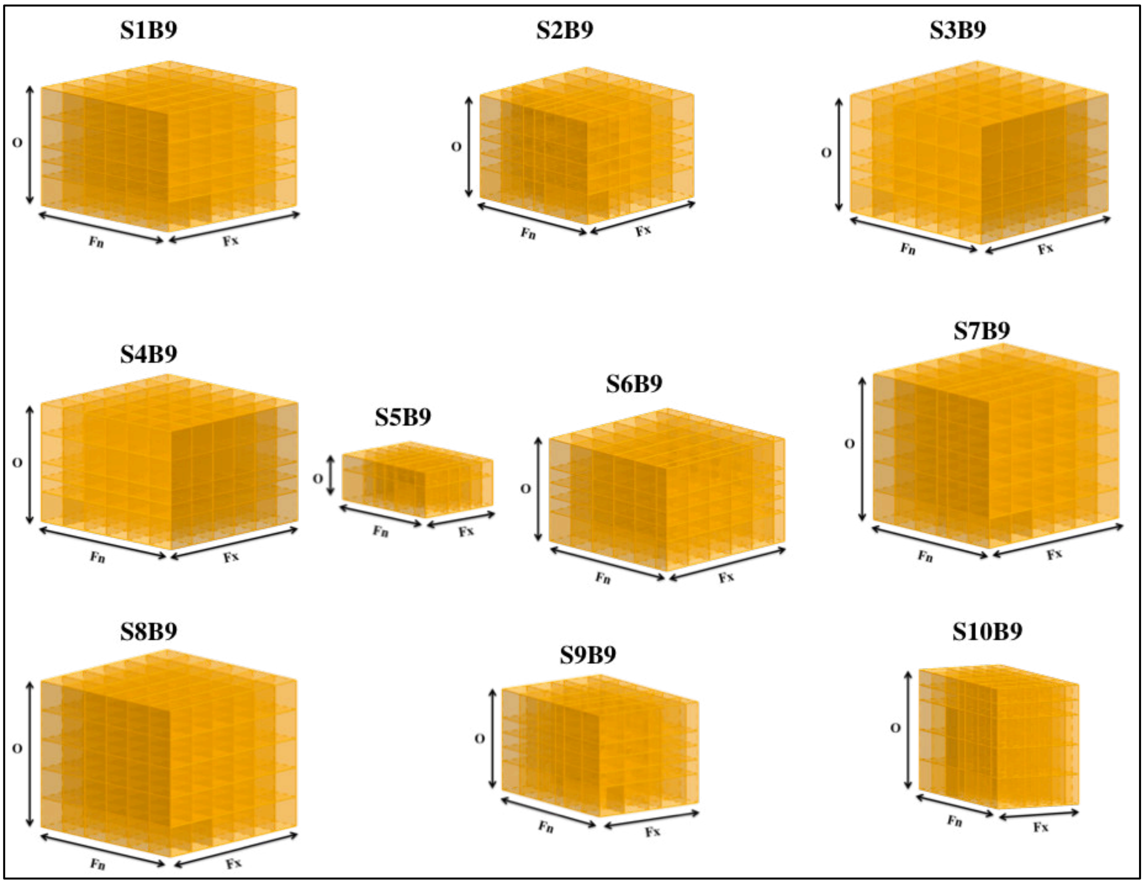


Figura 10 – Criatividade nas resoluções do problema 9, edição 11/12

A codificação do descritor N4 com o sinal menos (-) nas resoluções S2B9, S6B9, S9B9 e S10B9 destaca formas de raciocínio que de alguma forma revelam a manifestação de aspetos comuns, identificados entre si, ou nas restantes resoluções construídas para resolver o problema, no seio ou fora da amostra. Já na resolução S5B9 foi atribuído 0 (zero) ao mesmo descritor por não ser explícito o raciocínio usado para obter a expressão numérica que permitiu resolver o problema. A resolução S2B9 revela uma forma de raciocínio apoiado na representação gráfica do disco do computador para através das operações de multiplicação e divisão calcular a parte infetada pelo vírus em cada um dos quatro dias. Na resolução S6B9, não é exclusivo desta abordagem o raciocínio seguido para determinar a parte infetada pelo vírus com o apoio da representação gráfica construída a partir do mínimo múltiplo comum entre os denominadores das frações do enunciado. Na resolução S9B9 confirma-se uma forma de raciocínio identificada no conjunto de todas as resoluções enviadas para o SUB12, na respetiva fase de apuramento. Na resolução S10B9 verifica-se uma forma de raciocínio que obriga a fazer suposições relativamente ao que está omisso na explicação.

Nas resoluções S5B9 e S10B9, o símbolo menos (-) atribuído ao descritor N5 indicia uma certa falta de objetividade e clareza. Mais uma vez se refere que não foi justificado o procedimento aplicado para obter a expressão numérica representada na resolução S5B9. E na solução S10B9 não foi comunicado o procedimento que permitiu concluir que 9,6 cm correspondia aos 4/5 infetados pelo vírus ao longo dos quatro dias.

No âmbito da Fluência do Conhecimento Matemático, a variação do comprimento deve-se à codificação dos C2, C3, C4 e C7 com sinal menos (-) em várias resoluções e à atribuição do símbolo zero (0) ao descritor C5 nas resoluções onde não foi identificado. No caso da resolução S5B9, o descritor C2- indica que nem sempre o conhecimento matemático se encontra claramente em consonância com os dados, particularmente ao nível relação estabelecida entre as frações do enunciado para obter a expressão numérica indicada.

A falta de perspicácia e de rigor na execução do conhecimento matemático mobilizado nas resoluções S2B9 e S5B9 ditou os descritores C3- e C4-: na primeira, a forma de obter a fração irredutível não foi bem indicada e a representação gráfica não revela uma divisão efetivamente equitativa; a segunda, para além de carecer de procedimentos explícitos que revelem a forma como foi obtida a expressão numérica indicada, também evidencia alguma falta de rigor matemático. O descritor C4- foi ainda detetado noutras três resoluções devido a uma certa falta de rigor na aplicação do conhecimento processual implicado. Na resolução S7B9, o procedimento que permitiu obter a percentagem do disco rígido infetado pelo vírus nos quatro dias não foi corretamente executado, revelando uma incorreção matemática. Na resolução S9B9, observa-se também falta de rigor na execução de alguns procedimentos relativos a operações numéricas. Por exemplo, o processo usado em 50:3=16,66 revela um valor arredondado que despreza as regras de arredondamento (50:3 ≈ 16,67). Face à resolução S10B9 verifica-se um procedimento pouco preciso para determinar a parte, ou seja, a fração do disco infetada pelo vírus em cada um dos quatro dias.

A razão que levou à codificação com sinal menos (-) do descritor C7 nas resoluções S5B9, S6B9 e S10B9 prendeu-se com a falta de etapas para representar explicitamente parte do conhecimento matemático e dos procedimentos usados em determinados momentos de cada processo. Na resolução S5B9, não foi incluída a etapa que possibilitou obter a expressão numérica, como foi anteriormente referido. Na resolução S6B9 não foi representada a etapa da identificação do mínimo múltiplo comum entre os denominadores das frações. E na resolução S10B9 não se encontra a etapa na qual foram adicionadas as partes infetadas pelo vírus, cuja soma final foi 9,6 cm.

Excetuando na resolução S10B9, em todas as outras o descritor C5 foi codificado com o símbolo zero (0) por se admitir que a aplicação do conhecimento matemático não envolveu procedimentos genuinamente próprios.

Ao nível da Flexibilidade Representacional, na base da redução da largura de alguns paralelepípedos está a codificação dos descritores R2, R3, R6 e R7 com sinal menos (-), em algumas resoluções, e a atribuição do número zero (0) aos descritores R4 e R5 em várias resoluções.

Pelo facto de as representações usadas, provenientes de diferentes sistemas de representação, nem sempre traduzirem a ligação do conhecimento matemático e a sua relação com os dados, os descritores R2 e R3 foram codificados com o sinal menos (-) em três resoluções. Na resolução S2B9 foi justificado pela forma como foi representado o processo que permitiu obter a fração irredutível da parte infetada pelo vírus nos terceiro e quarto dias. Na resolução S5B9, foi motivado pela falta de clareza na representação e por não ter sido explicitado o raciocínio que levou à expressão numérica representada. Na resolução S9B9, relacionou-se com a falta de perspicácia ao nível da interligação dos diferentes sistemas de representação mobilizados. Já na resolução S10B9, relacionou-se com a frágil articulação das representações verbais e simbólicas no ato de determinar as partes infetadas pelo vírus em cada um dos quatro dias. O símbolo zero foi atribuído ao descritor R4 em todas as resoluções por não terem sido usadas representações próprias e ao descritor R5 nas resoluções S5B9, S9B9 e S10B9 por não se socorrerem de representações estratégicas para resolver o problema.

Dado que nem sempre o raciocínio foi totalmente expresso nas resoluções S5B9 e S10B9, o descritor R6 foi codificado com sinal menos (-): na primeira não é explicitamente representado o processo mental que levou à obtenção da expressão numérica; e na segunda não é visível a representação do raciocínio aditivo manifestado para chegar à solução correta.

Finalmente, o descritor R7- justifica-se pela falta de perspicácia no ato de comunicar três resoluções, que levou o leitor a um esforço de interpretação e de suposição para perceber os procedimentos usados em vários momentos do processo de resolução. Na resolução S5B9, só com muita dificuldade se admite que as operações indicadas dentro dos parênteses, na expressão numérica, se referem ao produto da parte infetada pela parte não infetada em cada um dos quatro dias. Na resolução S6B9, teve a ver com a descrição exaustiva do procedimento usado para resolver o problema através da representação gráfica construída. Na resolução S9B0, prendeu-se com uma certa falta de organização ao nível da representação da forma combinada das operações utilizadas e dos números decimais envolvidos. E na resolução S10B9, pela falta de objetividade e clareza na obtenção da solução e a sua relação com os 4/5 representativos da parte contaminada pelo vírus nos quatro dias.

Complementarmente, a tabela 25 e a figura 10 indicam-nos que a criatividade manifestada no conjunto de resoluções analisadas, alusivas ao problema "Vírus no computador", é condicionada pela Fluência do Conhecimento Matemático mobilizado e de igual modo pela expressividade da Originalidade e da Flexibilidade Representacional. Em consonância com as inferências emergentes da análise do conjunto de resoluções relativas ao problema "árvore genealógica", também aqui se constata que uma maior presença da Fluência do Conhecimento Matemático implica uma maior manifestação da Originalidade e da Flexibilidade de Representacional e vice versa. Enquanto que nas resoluções S1B9, S3B9, S4B9, S7B9 e S8B9 se observa uma forte expressividade correlacionada dos três indicadores, em virtude da codificação com sinal mais (+) de quase todos os 19 descritores constantes do referencial de análise, nas resoluções S2B9, S5B9 e S9B9 a diminuição Fluência do Conhecimento Matemático parece ser acompanhada por uma menor Originalidade e, consequentemente, por uma menor Flexibilidade Representacional. Nota-se entretanto, nas resoluções deste problema, uma maior variabilidade na dimensão da Originalidade, quando comparada com as resoluções dos problemas anteriores. Isto pode ser reflexo da própria natureza do problema, que implica obviamente o uso de cálculo com frações, mas que permite várias formas de chegar aos cálculos. Portanto, constata-se que o tipo de criatividade manifestada neste conjunto de resoluções se mostra mais sólida em função da Originalidade evidenciada. No caso das resoluções analisadas a Fluência do Conhecimento Matemático parece ter contribuído para que formas diferentes e invulgares de pensar fossem bem-sucedidas, dado que revelou a capacidade dos participantes de aplicar estratégias e procedimentos com eficiência, precisão e flexibilidade (NCTM, 2014). Logo, parece que sem um certo nível de conhecimento a expressão da criatividade se torna mais difícil (Sriramam, 2008).

A resolução S10B9, no entanto, parece demonstrar que uma maior Originalidade e mesmo uma elevada Fluência do Conhecimento Matemático não significam automaticamente uma significativa Flexibilidade Representacional. Embora se trate de uma resolução singular, a manifestação da criatividade foi limitada, principalmente, pela ausência de representações próprias e estratégicas para resolver o problema. Além disso, ao nível da comunicação, a fraca capacidade de combinação das representações mobilizadas ditou a falta de clareza, de ligação do conhecimento matemático com os dados, bem como a menor solidez de todo o processo de raciocínio. Logo, neste enquadramento, verifica-se que para que uma resolução seja considerada altamente criativa não basta que seja original, nem tal depende unicamente do domínio do conhecimento matemático; há uma influência importante da forma como o raciocínio matemático e o conhecimento envolvido é representado (Runco & Jaeger, 2012; Leikin, 2009b). Embora a originalidade seja fundamental para que uma resolução seja considerada criativa, também é necessário que a abordagem escolhida seja eficaz e útil (Beghetto, 2007; Runco, 2003; Runco, 2006; Runco, 2004; Runco & Jaeger, 2012). Para além da Originalidade, a Flexibilidade é responsável por estimular o pensamento divergente, indispensável às manifestações mentais de ordem superior (Vale, 2011), que neste problema implicou a capacidade de representar adequadamente o conhecimento mobilizado para resolver o problema.

Com efeito, neste problema, primaram vários tipos de representação e a interação entre diferentes sistemas de representação, que são fatores muito relevantes no desenvolvimento da criatividade matemática (Sheffield, 2009). A originalidade esteve presente nestes sistemas de representação: gráficos, icónicos, esquemáticos e simbólicos. E foi igualmente interessante verificar como o disco rígido do computador foi conceptualizado por meio de ideias relacionadas com áreas, comprimentos, ângulos, etc. Esta diversidade denota o elevado grau de liberdade que os participantes revelaram na sua procura de formas úteis e adequadas de compreender e dar sentido ao problema (Ching, 1997). Assim, a criatividade matemática, especialmente ao nível da originalidade, foi neste problema muito marcada pelas ideias matemáticas que estruturaram o processo de resolução (principalmente no que se refere às formas de conceptualizar a fração e as operações com frações). Isto é revelador de que os jovens participantes são capazes de ser originais em termos do significado que atribuem a conceitos matemáticos no contexto da resolução de um problema (Runco, 2003). Por outro lado, essas formas originais de incorporar ideias e conceitos, na busca de uma solução, parecem impelir também a formas originais de exteriorizar e representar esses conceitos, seja através de métodos matemáticos mais formais (geralmente indicadores de maior proficiência) ou mais informais (geralmente reveladores de uma menor proficiência) (Aizikovitsh-Udi, 2013).

4.2.5. Resoluções do problema 10 da edição 2010/11

A resolução do problema 10 proposto na edição de 2010/11, "A jogar ao berlinde" (figura 11), passava por uma estratégia que permitisse distribuir proporcionalmente o número total de berlindes pelos três amigos tendo em conta a parte que cabia a cada um, tal como indicado no enunciado do problema.

Problema 10
A jogar ao berlinde

O Pedro, o David e a Joana estão a jogar ao berlinde. Ao todo, os três amigos têm 198 berlindes. O Pedro tem 3 vezes mais berlindes do que a Joana e o David tem 2 vezes menos berlindes do que a Joana.

Quantos berlindes tem cada um deles?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 11 - Problema 10, edição 10/11

Visando a aplicação do referencial de análise, a escolha das dez resoluções para integrarem a amostra para o estudo da criatividade foi determinada pela diversidade das estratégias utilizadas para resolver o problema. Todos os produtos gerados são diferenciados, ainda que as ideias que lhes deram origem, na maior parte dos casos, partilhem aspetos comuns. A singularidade das resoluções emerge da sincronização das estratégias, raciocínios e formas de representação mobilizadas para arquitetar cada uma.

Tal como em todas as resoluções analisadas anteriormente, ao longo do estudo é verificável que as evidências da criatividade neste conjunto de conjunto de soluções também são mais consistente numas do que noutras. Portanto, deste leque de resoluções ressalta uma espécie de criatividade heterogénea, em termos dos indicadores Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional, caraterizada pelos descritores que lhes são associados. Seguidamente serão expostos os resultados da análise das resoluções em quatro grupos, distinguidos de acordo com as estratégias seguidas para resolver a situação problemática levantada.

Análise das resoluções S1C10 e S2C10

As duas resoluções (Anexo 5) foram suportadas por ideias distintas e estrategicamente materializadas em esquemas que permitiram obter as respetivas soluções.

Evidências de Originalidade

As resoluções singulares e eficazes (N1+) permitem perceber ideias estruturantes que são diferentes entre si; o mesmo, porém, não se pode dizer quando se comparam com as restantes da amostra ou com a totalidade das resoluções construídas para resolver este problema na respetiva fase de apuramento do SUB12 (N2-). A resolução S1C10, gerada com base numa estratégia adequada e singular (N3+), expõe um raciocínio claro e invulgar (N4+), a partir do qual é assumida uma distribuição equitativa do número total de berlindes pelos três amigos, com o intuito de testar a ideia de atribuir um terço dos berlindes a cada um e verificar o ajuste a fazer de modo a que as proporções fossem respeitadas. A partir daqui, o raciocínio efetuado levou à manipulação da distribuição inicial do número de berlindes de forma esquemática e orientada, recorrendo a cálculos para, de uma forma única e objetiva, comunicar a solução (N5+). Mas nesta resolução, o pormenor e o cuidado são patentes, sendo igualmente de assinalar a simplicidade da ideia de considerar a divisão equitativa de berlindes como ponto de partida para ensaiar uma tentativa de divisão proporcional e em seguida relacionar o total obtido nessa tentativa, com o total apresentado no problema.

Na resolução S2C10, a distribuição dos berlindes pelos meninos é suportada por um esquema aditivo cujas parcelas correspondem ao número de partes dos berlindes a atribuir a cada um dos três amigos, cujo total levou a dividir a totalidade dos berlindes e marcou o ponto de partida para resolver o problema. Esta ideia que não é totalmente única, marcou uma estratégia semelhante a outras (N3-) que consistiu em dividir o número total de berlindes em nonos, indicando o quociente o número de berlindes a atribuir ao David e a partir do qual se podem calcular os berlindes a atribuir aos outros dois amigos em função da parte que lhes cabia. Ainda que a forma de comunicação seja invulgar, falta-lhe nitidamente objetividade e precisão (N5-), uma vez que traduz um raciocínio algo velado e em alguns momentos pouco claro (N4-), obrigando a um esforço razoável para ser decifrado e compreendido.

Na tabela da figura 26, é espelhado o registo dos descritores afetos à originalidade evidenciada nas resoluções S1C10 e S2C10.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S1C10	+	-	+	+	+
S2C10	+	-	-	-	-

Tabela 26 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Verifica-se que nas duas resoluções a Fluência do Conhecimento Matemático e a Flexibilidade Representacional transmitem a compreensão do problema em termos matemáticos (C6+), através da mobilização apropriada do conhecimento matemático (C1+), que é exteriorizado através de formas de representação selecionadas e, em geral, usadas adequadamente (R1+), levando à solução do problema em etapas estrategicamente melhor organizadas na solução S1C10 (C7+) do que na resolução S2C10 (C7-).

A resolução S1C10 implica a execução perspicaz e eficiente do conhecimento matemático (C3+), a partir do qual são aplicados e representados eficazmente conceitos e procedimentos (C4+) de forma combinada e interligada (R3+). O procedimento matemático original, refletido num esquema simples e eficaz, por via de representações próprias (R4+), na forma de um esquema bem sintonizado com o recurso à linguagem natural e à linguagem simbólica, resultou num todo representacional integrado e estratégico (R5+), que tornou visível a ideia de evoluir de uma distribuição em três partes iguais para uma distribuição proporcional. As formas de representação utilizadas permitiram uma comunicação eficaz e engenhosa (R7+), que refletem (C2+) a ligação do conhecimento matemático com os dados e condições (R2+), possibilitando ao leitor seguir o processo de raciocínio utilizado (R6+) e compreender com nitidez todas as etapas de resolução: (a) definição da estratégia de resolução, partindo da suposição "Se todos os alunos tivessem o mesmo número de berlindes"; (b) operacionalização da estratégia em duas fases, sendo a primeira fase uma experiência destinada a verificar como seria se todos tivessem o mesmo número de berlindes. Depois, dado que o Pedro tem três vezes mais berlindes do que a Joana, e que a parte de berlindes do David corresponde a metade da parte da Joana, surge a proporção em que os berlindes se distribuem. A segunda fase do desenvolvimento da estratégia corresponde à adição do número de berlindes atribuídos a cada um, que dá como resultado a metade do verdadeiro total de berlindes; (c) a conclusão emerge da perceção de que basta distribuir os berlindes sobrantes de acordo com a primeira distribuição descrita.

Já na resolução S2C10, embora sejam admissíveis diferentes etapas de resolução, a sua organização estratégica não é bem conseguida. A personalização do conhecimento matemático evocado, que emergiu da leitura dos dados indicados do enunciado, levou à construção de um esquema aditivo estratégico (R5+) para atacar o problema, conectando representações próprias (R4+), designadamente icónicas, com linguagem simbólica. A partir daqui, o leitor precisa de fazer um esforço considerável para compreender as relações estabelecidas para resolver o problema. Embora o conhecimento matemático usado se tenha revelado eficiente e se tenha manifestado através de representações adequadas (R1+), a falta de perspicácia na sua execução (C3-) é observável na aplicação pouco rigorosa dos procedimentos subjacentes (C4-) relacionados com a operação divisão, que foi indicada com um asterisco (por exemplo: 198*9=22). Além disso, a forma pouco objetiva como as representações foram usadas e interligadas (R2-) obriga a uma leitura insistente para entender o raciocínio usado (R6-), bem como a relação estabelecida entre o conhecimento mobilizado e os dados do problema (C2-). Deste modo, as representações convocadas, sob as formas icónica, simbólica e verbal, não foram proveitosamente conjugadas (R3-) de forma a permitirem uma comunicação eficaz e perspicaz (R7-). Nota-se que o problema foi resolvido a partir do número de berlindes a que o David tinha direito, encontrado através da divisão do número total de berlindes pelo número (9) obtido no esquema aditivo inicial. E posteriormente, a relação estabelecida a partir do número de berlindes do David para encontrar a quantidade de berlindes a distribuir pelos seus dois amigos foi representada de forma bastante confusa, parecendo mostrar várias tentativas de ir ajustando cada resultado ao que era pedido. Na tabela da figura 27, podemos observar o registo dos descritores associados aos indicadores Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional evidenciados nas resoluções S1C10 e S2C10.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S1C10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S2C10	+	**-**	**-**	**-**	**0**	+	**-**	+	**-**	**-**	+	+	**-**	**-**

Tabela 27 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Análise das resoluções S3C10, S4C10 e S5C10

Estas três resoluções (Anexo 5), idealizam uma distribuição proporcional do número total de berlindes numa vertente mais algébrica e simbólica. Quando comparadas no universo da amostra, ainda que nuns casos mais do que noutros, podemos elegê-las como resoluções invulgares ao considerarmos detalhes distintivos, cambiantes na forma de tratar o problema, nas formas de expor o raciocínio ou nas estratégias utilizadas, revelando elementos diferenciadores.

Evidências de Originalidade

As resoluções mostram-se eficazes, mas a ideia comum de recorrer a equações de primeiro grau (N2-) e a operacionalização de estratégias semelhantes (N3-) retiram veemência à singularidade de cada uma (N1-). No entanto, o modo invulgar e objetivo de comunicar as três resoluções (N5+) revela um raciocínio distinto e claro na resolução S3C10 (N4+) e não tanto nas soluções S4C10 e S5C10 (N4-). Particularmente, a resolução S5C10 distingue-se das outras por recorrer a um esquema elaborado, completo e preciso, para desenvolver mais aprofundadamente a abordagem algébrica e simbólica seguida. Utiliza letras como incógnitas, relações entre estas, recorre a setas, linhas curvas, e destaques com cores para comunicar a solução de forma invulgar. Aparentemente, o esquema e as sucessivas explicações acerca dos vários procedimentos (substituições, simplificações, transformações) que vão sendo efetuados espelham a necessidade de ir controlando os sucessivos passos de um trabalho de manipulação algébrica, que se vai desenvolvendo com cuidado e pormenor. Ainda que a abordagem seja formalmente eficaz, por se tratar de um tratamento algébrico do problema, baseado em equações, constata-se que a solução não transmite simplicidade e clareza e que parece ter obrigado a uma justificação exaustiva de todas as propriedades usadas. A tabela da figura 28, patenteia o registo dos descritores que permite caraterizar o indicador da originalidade evidenciado nas resoluções S3C10, S4C10 e S5C10.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S3C10	-	-	-	+	+
S4C10	-	-	-	-	+
S5C10	-	-	-	-	+

Tabela 28 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

Face às resoluções S3C10 e S4C10, a Fluência do Conhecimento Matemático transmite-se pelo conhecimento apropriadamente mobilizado (C1+) e pela capacidade de o representar adequadamente de (R1+), traduzindo-se na distribuição proporcional correta do número total de berlindes pelos três amigos. A relação muito clara e sólida entre o conhecimento matemático e os dados (C2+) é visível através das representações usadas (R2+) que, por sua vez, comprovam uma segura compreensão do problema (C6+). Além disso, a interligação estabelecida entre as representações, simbólicas e verbais, (R3+) confirma a execução perspicaz e eficiente do conhecimento matemático processual (C3+), bem como a simplicidade e eficácia dos procedimentos implicados (C4+). Em cada resolução, as representações refletem cada raciocínio efetuado (R6+), os quais são comunicados com maior nitidez e melhor organizados por etapas estratégicas na resolução S3C10 (C7+ e R7+) do que na solução S4C10 (C7- e R7-). Em qualquer uma das resoluções o problema é solucionado, recorrendo a uma equação de primeiro grau, que representa o número de berlindes a que a Joana tem direito, a partir do qual são estabelecidas as devidas relações, de acordo com os dados do enunciado, para calcular proporcionalmente o número de berlindes a que cada um dos amigos tem direito. A diferença entre as duas resoluções está no raciocínio estabelecido para encontrar as equações indicadas e na forma como foram resolvidas. Na resolução S3C10, a primeira etapa (a) é definida pela identificação em notação algébrica das partes dos berlindes a atribuir à Joana, ao Pedro e ao David; a segunda etapa (b) é marcada pela construção da equação que resultou dos dados indicados no enunciado; a terceira etapa (c) é destacada pela execução da estratégia escolhida, que consistiu na resolução da equação recorrendo à conversão dos dois primeiros termos em frações, para posteriormente serem substituídas por outras equivalentes com igual denominador; na quarta etapa (d) é evidente o recurso às operações multiplicação e divisão para, respetivamente, calcular o número de berlindes do Pedro e do David a partir do valor da incógnita (o número de berlindes da Joana); na última etapa (e) é registada a resposta à questão levantada no enunciado. Na resolução S4C10, a primeira fase (a) é revelada pela indicação da adição correspondente ao número total de berlindes, cujas parcelas correspondem ao nome dos três amigos simbolizados pelas respetivas iniciais, mostrando uma relação direta com os dados do enunciado; a segunda etapa (b) consiste na obtenção da equação de primeiro grau que permitiu calcular o número de berlindes da Joana; na terceira etapa (c) é resolvida a equação recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, com vista a isolar a incógnita representada pela letra j que indica o número de berlindes a que a Joana tem direito; na quarta etapa (d), é determinado o número de berlindes a que o Pedro e o David têm direito, na parte que lhes cabe a partir do número de berlindes da Joana e recorrendo à operação de multiplicação por 4 e por 0,5.

Analisando a resolução S5C10, a Fluência do Conhecimento Matemático e a Flexibilidade Representacional, indicam uma resolução onde o conhecimento é mobilizado apropriadamente (C1+) e representado adequadamente (R1+), reconhecendo-se a clara compreensão do problema (C6+). As representações usadas (R2+) refletem a relação consistente entre o conhecimento matemático e os dados do enunciado (C2+), onde nem sempre se observa uma aplicação pronta de vários conceitos (C3-), nem a aplicação eficaz e expedita de vários procedimentos, designadamente algébricos (C4-). A comunicação da resolução mostra-se densa e minuciosa (R7-) através de representações simbólicas, verbais, esquemáticas e visuais, que são, no entanto, devidamente interligadas (R3+) e refletem o processo de raciocínio utilizado (R6+), definindo a incógnita e manipulando as várias expressões algébricas e numéricas envolvidas, principalmente com base em substituições por expressões equivalentes à luz das propriedades das operações. Por exemplo, é visível o uso da multiplicação como operação inversa da divisão, bem como da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A exaustividade da resolução é acentuada pela necessidade de representar as ações efetuadas em cada passo, sem que tal fosse necessário do ponto de vista do conhecimento matemático formal. Na resolução são percetíveis diferentes etapas de resolução organizadas estrategicamente (C7+): (a) registo dos dados mais importantes resultantes da leitura e interpretação do problema, representados pelos nomes de cada amigo codificados com as respetivas letras inicias e destacados com cores; (b) operacionalização da abordagem algébrica escolhida, colocando em prática o conhecimento matemático e recorrendo à álgebra para fazer transformações, destacando com cores alguns passos da resolução e usando meios de explicação esquemáticos dos sucessivos passos realizados; (c) solução do problema, com a obtenção do valor de cada incógnita, isto é, o número de berlindes correspondentes a cada amigo; (d) e, por fim, a confirmação da solução, patente na adição do número de berlindes de cada um dos amigos, cuja soma coincide com o número total de berlindes.

Na tabela da figura 29, é visível registo dos descritores definidos aos indicadores Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional detetados nas resoluções S3C10, S4C10 e S5C10.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S3C10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	**0**	**0**	+	+
S4C10	+	+	+	+	**0**	+	**-**	+	+	+	**0**	**0**	+	**-**
S5C10	+	+	**-**	**-**	**0**	+	+	+	+	+	+	**0**	+	**-**

Tabela 29 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Análise das resoluções S6C10, S7C10 e S8C10

Tal como as três resoluções anteriores, estas (Anexo 5) também foram marcadas por procedimentos algébricos e simbólicos, embora os casos algébricos se tenham processado num modo que designaremos por pré-algébrico.

Evidências de Originalidade

A eficiência destas resoluções semelhantes (N1-) foi alicerçada em estratégias comuns (N3-) suportadas por ideias idênticas e com significado (N2-), que consistiram na divisão da unidade em nonos.

A resolução S6C10 assenta clara consciência da proporção (número de partes correspondente a cada amigo relativamente ao total de partes), sugerindo a tradução do problema em termos de quantidades fracionárias, através da qual surgem modos equivalentes de efetuar os cálculos necessários. As representações escolhidas foram utilizadas de forma pormenorizada e cuidadosa para explicitar um raciocínio próprio e claro (N4+), através de uma comunicação objetiva e diferenciada (N5+) que ressalta dos dois processos de resolução incluídos.

No que se refere às resoluções semelhantes, S7C10 e S8C10 centram-se na procura do número de partes iguais em que a coleção de berlindes foi dividida e na proporção que cabe a cada um dos amigos. Embora tenham caraterísticas análogas, denunciadas por estratégias e raciocínios idênticos (N4-), revelam diferenças aparentes, particularmente, na utilização das representações selecionadas. Nas duas resoluções, é possível observar que as estratégias têm implícita a procura das proporções em que os berlindes foram divididos, através da construção de representações gráficas reveladoras da distribuição em nove partes iguais, atribuindo-se a cada amigo, a proporção de berlindes que decorre da redução à unidade (o David é a unidade que permite a comparação com os restantes amigos). As formas de comunicação utilizadas em cada situação conjugam perfeitamente representações verbais, figurativas e numéricas, para resolver o problema, demonstrando atenção ao pormenor e à explicitação dos raciocínios mobilizados, embora com alguns aspetos comuns (N5+).

A tabela da figura 30, sintetiza o registo da presença do indicador originalidade nas resoluções S6C10, S7C10 e S8C10.

Indicador	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S6C10	-	-	-	+	+
S7C10	-	-	-	-	+
S8C10	-	-	-	-	+

Tabela 30 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

A Fluência e a Flexibilidade são destacadas pelo uso adequado das representações utilizadas (R1+), que evidenciam a compreensão do problema (C6+), traduzida pela mobilização apropriada do conhecimento matemático (C1+), cuja ligação com os dados através de representações revela uma melhor sintonia nas resoluções S6C10 e S7C10 (C2+ e R2+), do que na soluções S8C10 (C2+ e R2-). As representações usadas na resolução S6C10 revelam com clareza o processo de raciocínio utilizado (R6+), a execução eficiente e perspicaz do conhecimento matemático (C3+) e a aplicação eficaz e simples dos procedimentos associados (C4+). Todo o processo de resolução foi marcado por uma comunicação perspicaz e eficaz (R7+), recorrendo a representações verbais e simbólicas (R3+), através das quais se observa o uso de vários conceitos e procedimentos matemáticos, incluindo operações aritméticas elementares e uso de operações com frações. Trata-se de uma resolução organizada estrategicamente em etapas de resolução (C7+) e sem levantar dúvidas, onde: (a) é visível o registo dos dados mais importantes em linguagem natural; (b) a operacionalização da estratégia selecionada, recorrendo à divisão do total de berlindes em nove partes ou, em alternativa, ao cálculo da fração de berlindes correspondentes a cada um dos amigos; (c) e, por último, a solução onde é registado o número de berlindes que cabe a cada amigo. De acordo com a resolução, o aluno que a construiu não se contentou com um único modo de resolução, uma vez que apresentou duas formas diferentes de chegar ao resultado, usando, talvez, a segunda para confirmar o resultado da primeira.

Nas resoluções S7C10 e S8C10, o conhecimento matemático é executado eficazmente de forma idêntica, mas com maior perspicácia na primeira (C3+) do que na segunda (C3-), recorrendo a representações simbólicas, verbais e esquemáticas interligadas, igualmente com maior eficácia em S7C10 (R3+) do que em S8C10 (R3-). Em ambas as resoluções, é possível identificar a utilização de procedimentos matemáticos, também de forma mais simples e eficaz na resolução S7C10 (C4+) do que na solução S8C10 (C4-). O processo seguido nas duas resoluções, permite constatar, ainda que de uma forma implícita, o recurso ao conhecimento matemático subjacente à divisão proporcional, recorrendo à divisão do todo em nonos e obtendo a proporção de berlindes que cabia a cada um dos seus dois amigos, através das relações de dobro e triplo. No sentido de chegar à solução, é clara a utilização de operações numéricas elementares, isto é, divisão e multiplicação, para chegar à parte correspondente a cada criança, em número de berlindes. Nas duas resoluções, são notórios os raciocínios seguidos pela forma como as representações foram combinadas, com mais subtileza em S7C10 (R6+) do que em S8C10 (R6-), para comunicar todo o processo eficazmente, com maior perspicácia na resolução S7C10 (R7+) do que na solução S8C10 (R7-).

Em cada caso, a forma como todo o processo foi representado permite reconstruir, de forma inequívoca, o raciocínio desenvolvido para atribuir os berlindes aos três amigos nas proporções indicadas. O método mobilizado e operacionalizado é revelado através de etapas com uma certa falta de organização estratégica na resolução S8C10 (C7-) e melhor na solução S7C10 (C7+): (a) definição da estratégia usada, suportada em cada caso por um esquema gráfico de divisão proporcional, construído recorrendo a representações próprias (R4+); (b) execução da estratégia, com base num esquema gráfico que se revelou mais útil para resolver o problema e que foi explicado com mais clareza na resolução S7C10 (R5+) do que na solução S8C10 (R5-); (c) solução expressa pelo número de berlindes correspondente a cada amigo.

Na tabela 31 consta o registo dos descritores indicados para caraterizar os indicadores Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional detetados nas resoluções S6C10, S7C10 e S8C10.

Indicadores	**Fluência (Fn)**							**Flexibilidade (Fx)**						
Descritores	**Conhecimento Matemático (C)**							**Representações (R)**						
	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**R7**
S6C10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	**0**	**0**	+	+
S7C10	+	+	+	+	**0**	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S8C10	+	+	-	-	**0**	+	-	+	-	-	+	-	-	-

Tabela 31 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Análise das resoluções S9C10 e S10C10

Nas resoluções S9C10 e S10C10 (Anexo 5) são seguidas estratégias de tentativa e erro, com as quais são testados vários números naturais em função dos dados e condições do problema para distribuir os berlindes por cada um dos amigos e, desta forma, responder à questão levantada no enunciado o problema.

Evidências de Originalidade

Os processos de resolução destacados nas resoluções eficazes e singulares S9C10 e S10C10 (N1+) são marcados por estratégias de tentativa e erro, que não sendo completamente fora do comum (N3-), propõem tabelas para operacionalizar as tentativas testadas, considerando, em cada caso, o número de berlindes de um dos amigos do qual dependerão os outros dois. Ainda que os raciocínios usados sejam distintos (N4+) ao nível da exploração das tentativas exploradas para encontrar os valores numéricos que permitiram a distribuição correta do número total de berlindes que cabe a cada amigo, a ideia que espoletou todo o processo é idêntica (N2-).

No caso da resolução S9C10, a estratégia para testar as tentativas efetuadas é estruturada a partir da aposta num número de berlindes a atribuir à Joana para de seguida identificar o número de berlindes a distribuir pelos seus dois amigos, em função da parte que lhes corresponde.

Já na resolução S10C10, o processo de testagem das tentativas é feito a partir do número de berlindes atribuíveis ao David para se seguida identificar com quantos berlindes ficará cada um dos seus dois amigos. Em cada situação as operações efetuadas e os destaques com cores, ilustram a forma organizada e orientada de conduzir as estratégias de tentativa e erro, que mostram que não surgiram por acaso, mas antes de forma ponderada. Cada resolução espelha um raciocínio singular, claro, pormenorizado e cuidadoso, bem como uma organização de todo o processo, revelando um esforço para tornar clara e objetiva a abordagem seguida. Ainda assim, o modo invulgar de comunicar cada uma das resoluções não é totalmente claro (N5-), uma vez que não é integralmente explicado o ponto de partida para chegar às três tentativas testadas em cada solução.

Perante a tabela 32 é observável o registo das evidências da criatividade subjacentes ao indicador Originalidade identificados nas resoluções S9C10 e S10C10.

Indicadores	**Originalidade (O)**				
Descritores	**Novidade (N)**				
	N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**
S9C10	+	-	-	+	-
S10C10	+	-	-	+	-

Tabela 32 – Síntese da Originalidade

Evidências da Fluência e da Flexibilidade

A relação simbiótica entre a Fluência e a Flexibilidade detetada nas duas resoluções é confirmada com base na mobilização de conhecimento matemático adequado (C1+), cuja relação coerente com os dados e condições (C2+) é materializada pelas representações usadas (R2+). O recurso a formas de representação adequadas (R1+) traduz procedimentos próprios (C5+) de executar o conhecimento matemático com eficiência e perspicácia em cada resolução (C3+). De forma diferente em cada caso, é incontestável a compreensão do problema (C6+), responsável pela aplicação eficaz e simples dos procedimentos necessários (C4+), recorrendo a linguagem simbólica, visual e verbal, devidamente interligadas (R3+) para solucionar o problema. As representações verbais utilizadas, para além de darem a ideia da estratégia seguida, também serviram de ponte para estabelecer conexões e coesão entre as diferentes representações utilizadas. As resoluções apresentam-se numa perspetiva conceptual simples, claramente apoiada pela forma como as tentativas realizadas são organizadas numa tabela estratégica (R5+). Nas resoluções é visível o recurso às operações relevantes, que relacionam os berlindes atribuídos aos vários amigos, de acordo com a parte que cabe a cada um. Nestas resoluções, a linguagem natural, complementar às representações numéricas, serve para tornar bem notória a estratégia usada (tentativa e erro) e mostrar a funcionalidade da tabela. Cada resolução é estruturada por etapas estratégicas devidamente organizadas (C7+): (a) indicação da estratégia de tentativa e erro; (b) desenvolvimento da estratégia através de números naturais facilmente calculáveis, aproximando-se ou distanciando-se dos valores representativos do número de berlindes atribuídos a cada amigo, na proporção indicada para cada um; (c) a solução surge naturalmente quando é encontrado o conjunto de valores, na proporção pretendida, que totalizam o número de berlindes existentes. A última etapa é manifestada apenas na resolução S10C10, onde é registado explicitamente o número de berlindes a que cada amigo tinha direito de acordo com a parte que lhe cabia. Embora as representações comuniquem o processo de raciocínio utilizado (R6+), faltou-lhes eficácia ao nível da perspicácia (R7-) para o leitor, pelo menos, saber o ponto de partida que levou às tentativas registadas na tabela e que possibilitaram resolver o problema.

A tabela 33, mostra o registo dos descritores indicados para caraterizar os indicadores Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional detetados nas resoluções S9C10 e S10C10.

Indicadores	Fluência/Proficiênca (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S9C10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	**0**	+	+	**-**
S10C10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	**0**	+	+	**-**

Tabela 33 – Síntese da Fluência e da Flexibilidade

Síntese analítica das resoluções

Na tabela 34, foram registados na totalidade os descritores detetados nas resoluções ao problema "A jogar ao berlinde", da fase de apuramento do SUB12 respeitante à edição 2010/11, selecionados para examinar o fenómeno da criatividade através da aplicação do referencial de análise proposto.

Indicadores	Originalidade (O)					Fluência/Proficiênca (Fn)							Flexibilidade (Fx)						
Descritores	Novidade (N)					Conhecimento Matemático (C)							Representações (R)						
	N1	N2	N3	N4	N5	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
S1C10	+	-	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S2C10	+	-	-	-	-	+	-	-	-	0	+	-	+	-	-	+	+	-	-
S3C10	-	-	-	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	0	+	+
S4C10	-	-	-	-	+	+	+	+	+	0	+	-	+	+	+	0	0	+	-
S5C10	-	-	-	-	+	+	+	-	-	0	+	+	+	+	+	+	0	+	-
S6C10	-	-	-	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	0	+	+
S7C10	-	-	-	-	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
S8C10	-	-	-	-	+	+	+	-	-	0	+	-	+	-	-	+	-	-	-
S9C10	+	-	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	-
S10C10	+	-	-	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	-

Tabela 34 - Evidências da criatividade nas resoluções do problema 10, edição 10/11

A partir dos dados registados na tabela, foram construídos gráficos paralelepipédicos representativos dos descritores detetados em cada uma das resoluções, como se pode observar na figura 12. Portanto, os paralelepípedos são formas geométricas representativas das evidências da criatividade manifestada em cada uma das resoluções analisadas. Em cada figura, tal como até aqui, a altura está associada ao indicador Originalidade, o comprimento ao indicador Fluência do Conhecimento Matemático e a largura ao indicador Flexibilidade Representacional.

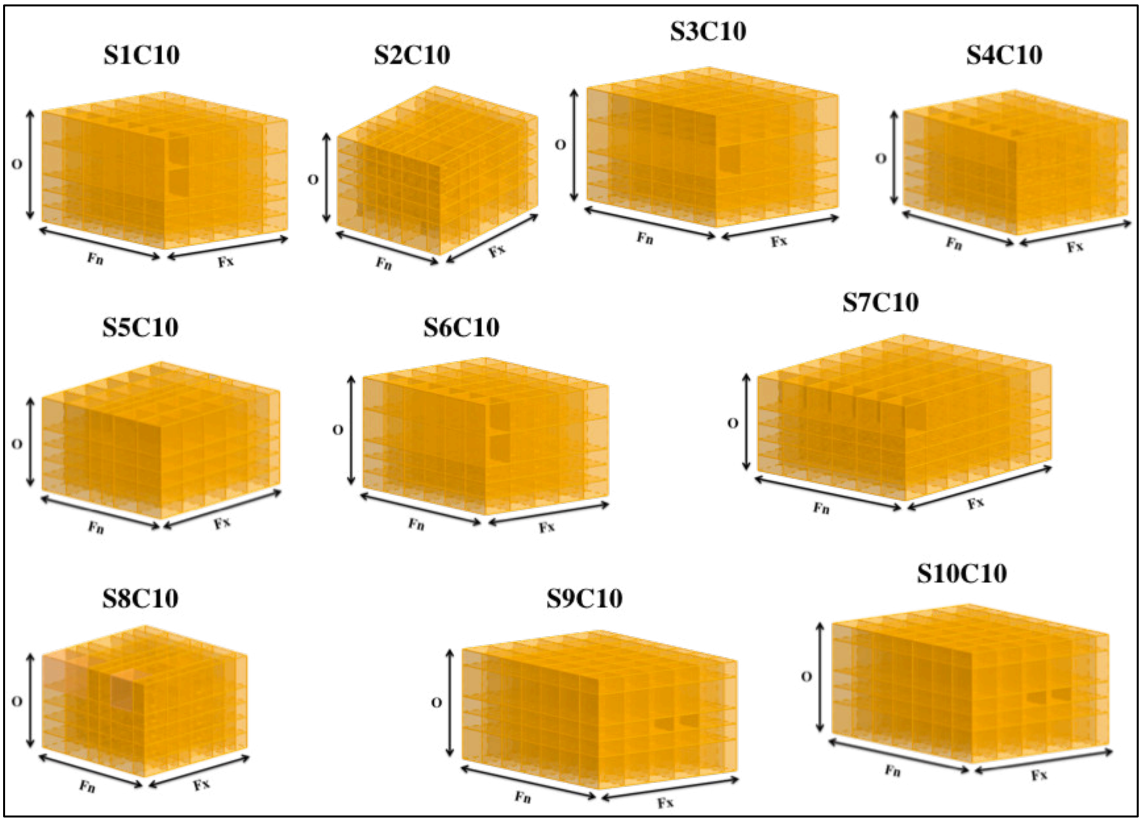


Figura 12 – Criatividade nas resoluções do problema 10, edição 10/11

No que respeita a originalidade, verifica-se uma presença heterogénea dos descritores neste conjunto distinto de resoluções. Em todas as resoluções, a redução da altura do respetivo paralelepípedo é justificada pela codificação de vários descritores com o sinal – (menos).

O indicador N1- foi associado às resoluções S3C10, S4C10, S5C10, S6C10, S7C10 e S8C10 por estas terem revelado aspetos idênticos ao longo da sua conceção. Enquanto que nas resoluções S3C10, S4C10 e S5C10 é visível o recurso a equações de primeiro grau para resolver o problema, nas soluções S6C10, S7C10 e S8C10 foram usadas operações aritméticas para o mesmo fim, entre quais as duas últimas foram suportados por esquemas com notações pré-algébricas.

Em todas as resoluções o descritor N2 foi codificado com o símbolo – (menos). No casos das resoluções S1C10, S2C10, S3C10, S4C10, S5C10, S6C10, S7C10 e S8C10 e foi devido a ambas partirem da ideia de dividir o número total de berlindes em nonos, para depois relacionar o quociente com a parte dos berlindes que cada amigo tinha direito e, desta forma, responder à questão levantada no problema. Já nas resoluções S9C10 e S10C10, o sinal – (menos) identifica a ideia semelhante de explorar por tentativas vários valores numéricos para encontrar o número de berlindes a atribuir a cada amigo, de acordo com a parte que lhes cabia.

Excetuando a resolução S1C10, nas restantes resoluções o descritor N3- indica o recurso a estratégias similares para resolver o problema: as resoluções S3C10, S4C10 e S5C10 recorrem a equações do primeiro grau para encontrar o número de berlindes a atribuir à Joana e a partir do valor encontrado calcular a parte correspondente aos seus dois amigos; as resoluções S2C10, S6C10, S7C10 e S8C10 usaram as operações aritméticas para o mesmo efeito, mas neste caso para obter o número de berlindes a que o David tinha direito e a partir dele solucionar o problema; e as resoluções S9C10 e S10C10 socorrem-se de estratégias de tentativa e erro para testar valores numéricos relacionando-os com os dados do problema até o solucionar.

Ao nível do raciocínio, o descritor N4- destaca pontos comuns dos raciocínios manifestados em várias resoluções, e na resolução S2C10 obriga a um esforço acrescido para decifrar o pensamento usado para identificar o número de berlindes de cada um dos três amigos. Os raciocínios presentes nas resoluções S4C10 e S5C10 evidenciam semelhanças ao nível das equações encontradas. Nas resoluções S7C10 e S8C10 é destacado um raciocínio próximo para resolver o problema, cujas diferenças são marcadas pela abordagem pré-algébrica denunciada pelos esquemas construídos em cada solução.

De todas, as resoluções S2C10, S9C10 e S10C10 foram as que revelaram menor clareza e objetividade, devido à forma como foram expressas, levando a um esforço adicional para serem interpretadas e, por isso, o descritor N5 foi codificado com o sinal – (menos) em cada uma.

Perante a Fluência do Conhecimento Matemático, a redução do comprimento do paralelepípedo em cada resolução confirma-se pela atribuição do sinal – (menos) aos descritores C2, C3, C4 e C7 em várias resoluções; e pela codificação do descritor C5 com o número 0 (zero) em todas as resoluções.

Perante o sinal – (menos) atribuído ao descritor C2 na resolução S2C10, verifica-se a falta de clareza da relação do conhecimento matemático mobilizado com os dados do enunciado, em determinados momentos, que impedem de discernir com facilidade o raciocínio utlizado.

No que concerne ao descritor C3-, foi identificado nas resoluções S2C10, S5C10 e S8C10 pela falta de perspicácia na aplicação do conhecimento matemático. Na resolução S2C10, nem sempre é revelado rigor e organização do conhecimento matemático, gerando dificuldade em perceber a sua relação com os dados. Na resolução S5C10 verifica-se a aplicação do conhecimento de forma exaustiva, com a explicação de cada passo, recorrendo a vários elementos e linguagens. Na resolução S8C10, o conhecimento é aplicado exclusivamente com base em linguagem natural mas poderia ter sido apoiado pelo uso de linguagem simbólica.

O descritor C4- foi detetado nas resoluções S2C10, S5C10 e S8C10, apesar da eficácia, pela falta de simplicidade na execução dos procedimentos matemáticos subjacentes. No caso da resolução S2C10 surge devido à forma como foram representadas atabalhoadamente e, nalguns casos, com pouco rigor, as operações aritméticas mobilizadas para calcular o número de berlindes a atribuir a cada amigo. Na resolução S5C10 ocorre pelo facto de a equação ter sido tratada de forma muito extensa. E na resolução S8C10, pela falta de visibilidade de fluência na aritmética utilizada para encontrar o número de berlindes a atribuir à Joana e ao Pedro.

À exceção das resoluções S9C10 e S10C10, o descritor C5 foi codificado com 0 (zero) nas restantes resoluções dado que não é visível o recurso a procedimentos próprios para aplicar o conhecimento matemático utilizado. Por último, o descritor C7- indexado às resoluções S2C10, S4C10 e S8C10 denuncia falta de etapas na terceira resolução e falta de organização estratégica nas outras duas.

Quanto à Flexibilidade Representacional, nota-se a atribuição do sinal – (menos) e do número 0 (zero) em várias resoluções, sendo responsáveis pela redução da largura dos paralelepípedos. No caso da resolução S2C10, o sinal – (menos) associado aos descritores R2, R3, R6 e R7 está relacionado com a falta de rigor e clareza das representações usadas, devido à forma como foram conectadas para comunicar o raciocínio estabelecido e para relacionar o conhecimento matemático com os dados. Em vários momentos, devido à fragilidade da conexão entre as expressões numéricas envolvidas para determinar o numero de berlindes a atribuir à Joana e ao Pedro, tornou-se difícil seguir o raciocínio utilizado. No caso da resolução S8C10, a associação do sinal – (menos) aos descritores R2, R3, R5, R6 e R7 refere-se à frágil interligação das representações esquemáticas com o raciocínio mobilizado, bem como ao uso pouco organizado da linguagem natural.

Às resoluções S3C10, S4C10, S6C10, S9C10 e C10C10 foi atribuído o número 0 (zero) ao descritor R4 pela ausência de representações próprias na construção das resoluções. Nas resoluções S3C10, S4C10, S5C10 e C6C10, o descritor R5 também foi codificado com o algarismo 0 (zero) por não serem suportadas por representações estratégicas. Por fim, a falta de perspicácia e objetividade levou à codificação do descritor R7 com o sinal – (menos) nas resoluções S2C10, S4C10, S5C10, S8C10, S9C10 e C10C10.

Analisando os paralelepípedos da figura 12, é possível inferir que uma maior presença Fluência do Conhecimento Matemático parece associada a uma maior expressão da Originalidade e também da Flexibilidade Representacional (S1C10, S3C10, S6C10, S9C10 e S10C10).

A resolução S7C10 parece ser uma exceção, uma vez que neste caso a uma elevada Fluência do Conhecimento Matemático e uma elevada Flexibilidade Representacional não se agrega uma maior Originalidade. Esta situação deve-se às semelhanças que a resolução evidenciou em relação a pelo menos outra constante da amostra, ao nível da ideia de que esteve na base de todo o processo, da estratégia utilizada e do raciocínio manifestado, evidenciando não ser, no seu todo, genuinamente singular.

Neste conjunto de resoluções, pode-se considerar que o conhecimento foi uma condição necessária para a manifestação do fenómeno criativo (Leikin, 2011; Leikin & Lev, 2013). Aliás, em qualquer nível de criatividade, a base de conhecimento a partir da qual se trabalha é uma componente crítica do funcionamento criativo (Feldhusen, 2006). E neste contexto, uma maior presença da fluência nas resoluções analisadas é indicadora da mobilização do conhecimento matemático necessário, bem como da capacidade para fazer julgamentos críticos sobre quais serão os procedimentos ou estratégias apropriados para solucionar certo tipo de problema (NCTM, 2014). Ainda assim, tanto a Originalidade como a Flexibilidade Representacional voltam a revelar-se importantes e em linha com um certo pensamento divergente (Vale, 2011) que é relevante no contexto empírico deste estudo, isto é, uma atividade de resolução de problemas que se desenvolve para além da escola. A resolução de problemas é um processo por natureza complexo e a capacidade de representação é determinante para lidar com a complexidade (Sajadi, Amiripour & Rostamy-Malkhalifeh, 2013). De acordo com a figura 12, verifica-se que a presença de uma maior Flexibilidade Representacional corresponde, em regra, a uma maior expressão da Originalidade. Sendo assim, as resoluções analisadas destacaram indivíduos capazes de recorrer uma variedade de representações com diferentes sentidos e vantagens complementares (visuais, geométricas, simbólicas, ...), indiciando propensão para resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009), contribuindo para a invulgaridade das soluções, quando comparadas dentro da amostra selecionada ou no total das respostas que foram submetidas no campeonato. A capacidade para usar a linguagem natural parece constituir, além disso, uma caraterística da flexibilidade representacional que surge praticamente em todas as resoluções e permite transições entre representações matemáticas e não matemáticas, originárias de diferentes sistemas de representação.

Resumindo, a originalidade aponta-nos resoluções construídas com base em ideias novas, únicas e valiosas para resolver o problema, caraterizando formas singulares de pensar presentes nas resoluções construídas (Guerra, 2007). Ainda que a criatividade se tenha manifestado através de produtos únicos, distinguidos pela originalidade como o seu mais destacado componente (Leikin, 2013), a Fluência do Conhecimento Matemático e a Flexibilidade de Representação não podem ser desvalorizados na avaliação dos produtos criativos. Em certa medida, o pensamento criativo foi alicerçado pela fluência e precisão do conhecimento matemático na resolução de tarefas não rotineiras, perante as quais ganha maior pertinência e interesse o recurso a representações originais e significativas (Aizikovitsh-Udi, 2013). A Fluência do Conhecimento Matemático constitui aparentemente uma base essencial da criatividade matemática presente nas resoluções; sobre essa a Originalidade e a Flexibilidade Representacional tornam-se fortemente determinantes da invulgaridade de cada resolução no contexto da amostra. Assim, uma vez mais, a criatividade manifestada neste conjunto de resoluções dependeu da relação dinâmica estabelecida entre as três dimensões que a compõem, à luz do referencial proposto.

4.3. Resultados da análise das entrevistas

Esta segunda secção será caraterizada e organizada em duas subsecções, nas quais irão ser relatados e analisados os dados das entrevistas efetuadas a seis alunos finalistas do Campeonato de Resolução de Problemas SUB12, na edição 2009/10, selecionados intencionalmente para este estudo, e às respetivas cinco professoras (dois dos alunos tinham a mesma professora).

4.3.1. Entrevistas aos alunos

Nesta subsecção, a análise dos dados e os resultados extraídos, serão orientados pela estrutura do guião que serviu de base às entrevistas com os seis alunos selecionados para este estudo, finalistas do SUB12 na edição 2009/10.

Relação com a resolução de problemas

Todos os alunos entrevistados gostam de resolver problemas (questão 1, tabela 35).

	1- Certamente que gostas de matemática e mais especificamente de resolver problemas. O que te fascina nesta atividade? Explica porquê.
A1	Desenvolve o raciocínio. Promove a descoberta formas de resolução.
A2	Variedade de formas de resolução. Resolução de problemas difíceis.
A3	Melhorar competências matemáticas.
A4	Não conseguiu explicar.
A5	Prazer na resolução de problemas de matemática.
A6	Descobrir resoluções é mágico.

Tabela 35 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 1

Quando se pediu para explicarem o que os fascinava na atividade de resolução de problemas, apenas o aluno A4 deu uma justificação vaga, evidenciando um certo nervosismo e alguma dificuldade em encontrar as palavras certas para comunicar:

> "(...) Porque desenvolvemos o raciocínio e faz com que descobrimos novas coisas dentro dos problemas, novas maneiras de resolver. Também me fascina o facto de um problema ter mais de 10 maneiras [de resolver] por exemplo. (...)" (A1)

> "Fascina-me o facto de um problema ter várias resoluções possíveis … mais de [uma]… Um problema aparentemente difícil, que não se consegue resolver [de imediato], depois de reler o enunciado e pensar um pouco consegue-se resolver. (...)"(A2)

> "Eu sempre gostei de matemática, de resolver problemas… Porque é fixe e ajuda a melhorar as competências. De matemática." (A3)

> "Sim. Porque gosto." (A4)

> "Eu tenho prazer em resolver problemas de matemática. Mais… não sei. Não, não consigo explicar." (A5)

> "(...) Sim. (...) É chegar ao fim com o resultado certo. Hum, hum. (...) É … Para mim, é tipo… é uma magia. Parece uma magia quando eu descubro as resoluções dos problemas." (A6)

Estes alunos, para além de terem prazer ao resolver problemas, reconhecem que esta atividade favorece a descoberta, principalmente de diversas formas de resolução, e o desenvolvimento das suas capacidades e competências matemáticas, nomeadamente o raciocínio e a capacidade de encontrar coisas novas nos problemas. Portanto, no caso destes alunos, a resolução de problemas não só promove o desenvolvimento das suas habilidades e capacidades cognitivas matemáticas, como também os motiva e estimula para estudar a matemática e encontrar conhecimento matemático novo a partir dos problemas (Gusev & Safuanov, 2012; Pehkonen, 1997; Vale & Pimentel, 2011).

Os finalistas entrevistados descobriram o gosto pela resolução de problemas (questão 2, tabela 36) desde cedo (1º ou 2º ciclo) e em momentos distintos.

	2- Quando descobriste o gosto pela resolução de problemas?
A1	No 2.º ciclo, onde a professora foi determinante.
A2	No 2.º ciclo, onde a professora foi determinante.
A3	No 2.º/3.º ano, quando começou a gostar de matemática.
A4	No 3.º ano, através do concurso Problema do Mês.
A5	No 1.º ano, quando teve contato com atividades de matemática
A6	No 4.º ano, devido ao incentivo da professora e à participação no Supertematic.

Tabela 36 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 2

No caso das alunas A1 e A2, a professora P1 foi determinante para que as mesmas descobrissem o gosto pela resolução de problemas no segundo ciclo, no ano letivo de 2009/2010, período coincidente com a sua participação, pela primeira vez, no SUB12. De acordo com as alunas, para além da professora P1 as ter incentivado a participar no campeonato SUB12, também propunha, constantemente, atividades de resolução de problemas na turma onde as alunas estavam inseridas.

> "Mais neste ano, porque a professora P1 aprofundava muito isto dos problemas. Nos anos anteriores não eram [resolvidos] assim tantos problemas. Estes problemas, também, que a professora P1 fazia eram mais aprofundados". (A1)

> "Foi mais este ano, por causa da minha professora de matemática." (A2)

Os finalistas A3, A4, A5, e A6 descobriram o gosto pela resolução de problemas no primeiro ciclo. No entanto, os alunos A4 e A6 descobriram o gosto pela resolução de problemas em situações competitivas, o primeiro através do concurso Problema do Mês e o segundo a partir do Supertematic:

> "(...) Lá no 3.º ano, eu… Ouve lá um concurso que era o problema do mês e eu ganhei aquilo. (...) Acertei os problemas todos menos o primeiro." (A4)
>
> "Eh… foi no 4º ano quando eu estava na … a minha professora era … eu estava a ser muito incentivado a resolver … resolver. Já participava no Supertematic também. A nossa professora do 4º ano incentivava-nos muito a resolver os problemas." (A6)

De acordo com o participante A3, o gosto pela resolução de problemas começou no 1.º ciclo e em simultâneo com o gosto pela matemática:

> "Foi logo no segundo/terceiro ano, comecei logo a gostar mais de matemática, à frente das outras disciplinas e comecei também… Como era bom, comecei logo a gostar de resolver problemas." (A3)

Também o aluno A5, descobriu o gosto pela resolução de problemas desde o início do primeiro ciclo:

> "Quando entrei para o 1.º ano, mais ou menos. Comecei a fazer fichas de matemática simples e safava-me. E comecei a dominar melhor a matéria."(A5)

Quatro dos seis entrevistados revelaram que desenvolveram o gosto pela resolução de problemas no primeiro ciclo e os outros dois no segundo ciclo, nomeadamente, desde o momento em que tiveram experiências significativas na disciplina de matemática. Esta predisposição para resolver problemas foi influenciada pelos respetivos professores que os estimularam e incentivaram para a atividade, quer em sala de aula, quer através da sua participação em competições extracurriculares, tanto na escola (por exemplo, O Problema do Mês. ...) como para além da escola (por exemplo, o SUB12, ...). O facto de estes alunos resolverem problemas desde cedo é uma ferramenta poderosa para melhorar a sua aprendizagem da matemática com compreensão e desenvolver a sua criatividade (Steinberg, 2013; Pehkonen, 1997). Além do mais, sabe-se que este gosto precoce incute nos jovens hábitos de descoberta e o prazer em encontrar formas novas de pensar e processos de resolução próprios (Na, Han, Lee & Song, 2007), bem como potencia e estimula habilidades inatas, tais como, conjeturar, analisar e justificar (Prusak & Levenson, 2008).

Os finalistas entrevistados manifestam de um modo geral alguma frustração e nervosismo quando não conseguem resolver um problema mas são unânimes em declarar que continuam a tentar (questão 3, tabela 37). Mostram por isso persistência e revelam a autoconfiança que os leva a acreditar que conseguirão obter a solução.

	3- Sempre que surge um problema que não consegues resolver imediatamente, o que sentes?	**3.1- Qual é a tua preocupação?**
A1	Aflita, confusa e ansiosa.	Tentar manter a calma, ler novamente. Se não conseguir pede ajuda.
A2	Constrangida.	Manter a calma e tentar resolver.
A3	Frustrado.	Ver onde errou. Pedir ajuda em último caso.
A4	Não sente nada.	Tentar resolver.
A5	Parar, resolver outro e mais tarde voltar ao mesmo.	
A6	Sente-se inferior	Tentar descobrir a solução e melhorar a sua capacidade.

Tabela 37 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 3

Quando surge um problema que não consegue resolver, a aluna A1, embora tente encontrar a solução, assume pedir ajuda, uma vez que consente ficar aflita, confusa e ansiosa:

> "Começo… Tenho que manter a calma e voltar a ler algumas vezes o problema, a ver se consigo mesmo perceber. Quando eu não consigo resolver um problema, também, quando posso, peço ajuda nalguma coisa ou então releio outra vez o problema (...)." (A1)

Embora confesse ficar com uma certa ansiedade, a reação da aluna A2 é tentar resolver o problema:

> "A minha preocupação é tentar resolvê-lo e sinto-me um bocado… não sei qual é a palavra correta mas… constrangida! (...) Mantenho a calma, mas no princípio é… é isso." (A2)

Em caso de dificuldade em encontrar a solução, o aluno A3 fica frustrado, assumindo recorrer a ajuda se necessário:

> "O que é que eu sinto? Um pouco frustrado. [A minha preocupação é] Ver o que é que fiz mal e isso… Para também ver onde é que eu errei (...). Às vezes, em último caso… se não conseguir fazer por mim próprio, em último caso, peço ajuda." (A3)

O aluno A4, revela não sentir qualquer emoção perante um problema no qual não consiga obter de imediato uma solução:

> "Não sinto nada. Fico a olhar para o problema a ver se encontro alguma coisa. [A minha preocupação é] Tentar resolver o problema." (A4)

No caso, do aluno A5, a sua preocupação quando não encontra uma resolução imediata para um problema, é tentar resolver outro e mais tarde voltar ao mesmo:

> "Se houver mais problemas passo à frente e depois volto a ele. Tento rever o problema e volto a tentar encontrar a solução." (A5)

Quando tem dificuldade em resolver um problema, o aluno A6 sente-se inferior aos outros que o conseguem resolver e a sua preocupação é a de querer melhorar.

> "É… descobrir a solução e tentar melhorar." (A6)

O tratamento de situações complexas e diversificadas oferece aos alunos a oportunidade de pensarem por si próprios, de construírem estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e representações, na busca de uma solução (Gontijo, 2006). Apesar das diferentes reações emocionais, sempre que se deparam com um problema que não conseguem solucionar, a preocupação dos entrevistados é tentarem resolvê-lo mesmo que para isso tenham que recorrer a algum tipo de ajuda. Desta forma, estes alunos revelam ser muito persistentes na abordagem de problemas difíceis, sem medo de experimentarem estratégias invulgares de resolução, usando métodos reversíveis de pensamento, ao mesmo tempo que processam informação de forma flexível (Sheffield, 2008).

As ideias que os alunos mais diretamente associaram aos problemas de matemática foram distintas, incluindo "ideias brilhantes", "inteligência" e "adrenalina" (questão 4, tabela 38). Estas palavras-chave revelam a sua convicção de que resolver problemas está ligado a ter ideias e não meramente a executar rotinas e afirmam que lhes ocorrem ideias com facilidade. Por outro lado, associam inteligência à capacidade de resolução de problemas e ao conhecimento que julgam ser necessário possuir. Por fim, referem novamente a questão do prazer, como no caso da escolha da palavra adrenalina.

	4- Quando pensa em problemas de matemática qual das seguintes palavras está de acordo com o que sentes: 1 confusão, 2 inteligência, 3 ideias brilhantes e 4 adrenalina. Porquê?
A1	Resolver problemas espoleta “Ideias Brilhantes”.
A2	“Ideias brilhantes” surgem no ato de resolver problemas.
A3	Resolver problemas implica “Inteligência”.
A4	“Ideias brilhantes” permitem resolver rapidamente os problemas.
A5	Gostar de resolver problemas provoca “Adrenalina”.
A6	“Inteligência”, dado que é uma caraterística dos matemáticos.

Tabela 38 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 4

Os alunos A1, A2 e A4 escolhem a palavra ideias brilhantes quando pensam em problemas de matemática (questão 4, ver anexo 6):

> “Ideias brilhantes. Porque quando eu olho para um problema, às vezes começam a aparecer tantas ideias para o resolver que eu acho que são mesmo boas (...)” (A1)

> “Ideias brilhantes. Porque quando eu estou a resolver um problema vêm-me várias ideias à cabeça.” (A2)

> “Ideias brilhantes. Porque sempre que eu leio um problema… sempre que eu leio um problema, consigo logo… rapidamente fazê-lo.” (A4)

Geralmente, a criatividade está associada à capacidade para ter ideias originais (Beghetto & Kaufman, 2013b), que surgem de operações mentais suportadas pelo conhecimento existente (Ward, 2007). A expressão criativa dos alunos que gostam de matemática pressupõe uma forte inclinação para produzirem e exprimirem ideias novas e apropriadas às suas necessidades académicas, nomeadamente, para resolver problemas (Kousoulas, 2010). Este fenómeno, ao qual Hadamard (1954) chamou de iluminação, de acordo com o quadro conceptual que idealizou para a manifestação do pensamento criativo, geralmente ocorre após um período de incubação e é marcado pelo emergir de ideias na mente de um indivíduo em resultado da transição do que ocorre na mente inconsciente para a mente consciente.

Os alunos A3 e A6, consideram que para resolver problemas de matemática é preciso inteligência:

> “(...) Entre ideias brilhantes e inteligência se calhar escolho… inteligência. Porque é preciso ser-se pelo menos inteligente para se conseguir resolver.” (A3)

> “(...) Inteligência. Porque os grandes matemáticos eram pessoas que… que desenvolveram muito a ciência. Hum, hum, sim. Sabem aquelas fórmulas todas.” (A6)

Os indivíduos com capacidade de dominar e usar o conhecimento que possuem para gerar conhecimento novo, têm tendencialmente mais capacidade para serem criativos (Sternberg, 2008). E, por sua vez, a expressão criativa é um indicador da capacidade matemática dos alunos e a sua importância na matemática escolar é um elemento essencial na resolução de problemas (Silver, 1997; Vale, 2012).

Finalmente, o aluno A5, refere que resolver problemas de matemática significa sentir a adrenalina:

"Adrenalina. Porque é uma coisa que eu gosto de fazer. (...)"(A5)

A motivação é um elemento importante que potencia a expressão criativa, dado que espoleta recursos cognitivos e de personalidade e contribui para o desenvolvimento de habilidades criativas (Stoycheva, 2002). Quanto maior for a motivação intrínseca, maior é a probabilidade de descobertas e aplicações criativas (Mann, 2005).

A Matemática numa vertente competitiva

Verifica-se que os alunos entrevistados têm uma participação frequente em campeonatos e competições matemáticas diversas e que essa participação é fruto do seu gosto pela matemática, da sua vontade de aprender, dos incentivos que recebem e também de algum entusiasmo pela competição (questão 5, tabela 39).

Os alunos A1, A2, A3 e A6, para além de terem participado no SUB12 e em campeonatos organizados pelas próprias escolas, também participaram noutras competições matemáticas extracurriculares, organizadas por entidades exteriores à escola:

> "Sim. Participei neste SUB12. Também participei no MaisMat, que foi em Aveiro. Em Aveiro, foi muito bom, foi… fiz equipa com uma menina e fomos a melhor equipa do Algarve." (A1)
>
> "Tenho. (...) [para além de ter participado do SUB12] Participei, não foi neste ano, foi no ano passado, no de Aveiro, pronto, foi esse. MaisMat." (A2)
>
> "Tenho. Para além do SUB12… aqui, na escola participei no Kanguru sem fronteiras, nas Pré Olimpíadas e no Supertematic." (A3)
>
> "(...) Tive num apuramento para o Supertematic (...)" (A6)

	5- Tens participado em campeonatos de resolução de problemas? Quais?	5.1- O que te leva a participar? O que te fascina?
A1	SUB12 e MaisMat.	Gosto pela aprendizagem matemática. Desenvolvimento do raciocínio. Aprendizagem de novas formas de resolver problemas.
A2	SUB12 e MaisMat.	Obtenção de conhecimento matemático e o espírito de competição.
A3	SUB12, Kanguru, Pré-Olimpíadas e Supertematic.	É divertido. Gosto pela matemática. Melhorar as capacidades.
A4	SUB12 e Problema do Mês?	Vontade de ganhar. Capacidade de ganhar.
A5	SUB12.	Gosto pela matemática e pelo mérito.
A6	SUB12 e Supertematic.	Incentivo por parte dos professores e pela competição entre escolas.

Tabela 39 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 5

Quando foi perguntado ao aluno A4 acerca da sua participação em campeonatos de resolução de problemas, referiu ter participado apenas no SUB12. No entanto, posteriormente, lembrou-se que tinha participado no Problema do Mês, organizado pela escola que frequentou no terceiro ano de escolaridade.

Para além do SUB12, o aluno A5 assume nunca ter participado noutros campeonatos de resolução de problemas, inclusive a nível escolar. No ano anterior, o aluno tinha participado na edição 2008/2009 do SUB12, mas, como não conseguiu responder a pelo menos dez problemas de forma correta, desistiu.

Na maioria dos casos, os alunos participam em competições matemáticas pelo gosto de competir e pela matemática, pela aprendizagem, obtenção de mais conhecimento, pela possibilidade de melhorarem as suas capacidades de resolver problemas, para desenvolver o raciocínio e pelo facto de serem incentivados pelos seus professores:

> "Porque gosto muito de matemática e gosto do convívio, das pessoas. Sim e também aprendemos mais e podemos também [aprender] com os outros. [As competições] Podem desenvolver muito o raciocínio. E eu posso, podem-me ensinar novas formas de fazer problemas." (A1)

> "É que depois fico com muitos mais conhecimentos de matemática. (...). Pronto, é isso. Fico entusiasmada. Sim, também, tenho espírito de competição. (...)." (A2)

> "Acho que é divertido. Olha, sempre gostei de matemática e gosto de fazer estas coisas, além de que acho que me pode ajudar também a melhorar as minhas capacidades." (A3)

> “Tenho sempre vontade de ganhar. Mas às vezes isso não acontece. [No entanto]... acho que posso… porque tenho capacidades para ganhar.” (A4)
>
> “Primeiro, pelo gosto pela matemática, e também pelo mérito.”(A5)
>
> “Às vezes, é o incentivo dos professores que começam a dizer que eu tenho capacidades e eu às vezes vou. Às vezes é o… é a … é a competição que há entre os … os nossos… os alunos de todas as várias escolas.” (A6)

As atividades extracurriculares procuram o desenvolvimento intelectual dos alunos ao nível da construção de significados, de habilidades de raciocínio e capacidades de comunicação (Freiman, 2009). Os testemunhos recolhidos junto dos alunos corroboram o que a investigação revela, na medida em que assumem que as competições matemáticas de resolução de problemas, para além da sala de aula, nas quais participam, constituem um estímulo para melhorar a sua aprendizagem (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004), bem como para o desenvolvimento das suas capacidades matemáticas (Freiman & Applebaum, 2009). Portanto, são contextos que marcam as atitudes dos alunos em relação à matemática e às suas capacidades de resolução de problemas por vezes motivadas por fatores competitivos e desafiantes, mas com reflexos significativos a nível educacional (Koichu & Andzans, 2009). Sendo assim, a preparação dos alunos envolvidos neste tipo de competições aumenta o seu conhecimento matemático de forma significativa (Kenderov, 2006). Face a esta realidade, é relevante constatar que competições de matemáticas, como o SUB12, podem constituir-se como parceiros da escola, dado que ajudam os alunos a adquirir conhecimentos e a melhorar as suas capacidades na resolução de problemas. Na verdade, as competições de resolução de problemas evidenciam potencial para aprofundar a relação entre os alunos e os conteúdos de matemática (Freiman, 2009). Acresce a circunstância de serem meios propícios para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, uma vez que não estão sujeitos à rigidez dos currículos e a rigorosos padrões de tratamento dos tópicos matemáticos (Koichu & Andzans, 2009; Freiman, 2009). E por isso, fomentam o desenvolvimento de habilidades criativas para explorar e atacar qualquer problema, a partir de métodos e estratégias próprias ou modificando as já apreendidas.

De uma forma geral, os alunos têm uma perspetiva favorável relativamente à organização, à dinâmica e às potencialidades do SUB12 (questão 6, tabela 40) na disciplina de matemática, bem como à ativação e desenvolvimento das capacidades transversais que lhes são inerentes, tais como resolver problemas, raciocinar e comunicar matematicamente.

	6- Qual a tua opinião sobre o SUB12?	**6.2- O que pensas dos problemas propostos?**
A1	Desenvolve o raciocínio. Fomenta a aprendizagem da matemática e de novas formas de resolução.	Fáceis.
A2	Desperta o gosto pela matemática.	Dificuldade média.
A3	É uma ajuda.	Desde os difíceis aos fáceis e um ou outro confuso.
A4	Boa experiência	Bons problemas, motivadores, desafiantes e entusiasmantes.
A5	Cativa os alunos para a matemática.	Mais fáceis os da fase de apuramento do que os da final.
A6	Incentiva a estudar matemática.	Adequados aos participantes.

Tabela 40 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 6

Do ponto de vista da aluna A1:

> "O SUB12 é um campeonato em que… basicamente resolvemos muitos problemas, que também são muito, também são muito aprofundados. Desenvolvemos, também, muito o raciocínio e também conseguimos aprender novas formas de resolver. Aprendemos, também, variados [conteúdos], por exemplo, aquilo é variado, tem também álgebra ou geometria ou também outras coisas." (A1)

A aluna A1 vivenciou esta experiência com persistência na fase de apuramento, tentando ser o mais autónoma possível de forma a ser bem-sucedida na fase da final do campeonato. Resolveu os problemas da fase de apuramento facilmente, orgulhando-se de nunca ter tido o *feedback* da equipa do SUB12, no sentido de corrigir ou completar qualquer dos problemas da quinzena, para serem validados:

> "Com a persistência, tentei sempre resolver os problemas [da fase de apuramento] sem ajuda, (...) porque na final já não tínhamos ajuda. (...)."

Do ponto de vista da aluna A2:

> "(...) o sub12 é um campeonato que desperta o gosto pela matemática. E é um campeonato, pronto, desperta o gosto pela matemática e é bom nesse aspeto. (...). Fiquei feliz, entusiasmada. Gostei de ter participado e no fim fiquei a aprender muito mais matemática."

Para esta aluna, os problemas propostos evidenciaram um grau acessível de dificuldade. Para evitar perder tempo, se não conseguia logo deixava-o e voltava a tentar resolvê-lo mais tarde:

> "Acho que não foram fáceis nem difíceis, foi um grau médio de dificuldade e eu consegui resolvê-los. Um ou outro não, mas depois passava à frente e no fim, para não perder tempo, e no fim voltava a esse problema para resolvê-lo." (A2)

Segundo a aluna, o *feedback* dado pela equipa do SUB12, para validar as resoluções, foi muito importante:

> "Porque [a equipa SUB12] dava sempre umas pistas sobre… indicava sempre o que é que era o passo que estava mal." (A2)

O aluno A3 considera que o SUB12 é uma ajuda, no entanto, durante a fase de apuramento, revelou sentir-se aborrecido por ter que obedecer a datas para enviar a resolução de cada problema quinzenal:

> "Às vezes sentia um pouco de aborrecimento. Ah, porque às vezes tinha-se de estar a responder num prazo de quinze dias e eu às vezes não me apetecia nada. E depois estava sempre a adiar e depois na última da hora tinha de estar a fazer, mas continuava a fazer."

Relativamente aos problemas, do ponto de vista deste aluno:

> "(...) havia um ou outro que era um pouco confuso… Houve um que achei um pouco difícil mas tirando isso… Depois havia um ou outro que era demasiado fácil até."

No entanto, o aluno considera que os problemas propostos no SUB12 eram equilibrados, orgulhando-se de ter resolvido corretamente os problemas, sem que precisasse do *feedback* da equipa organizadora.

Já para o aluno A4, o SUB12 é um concurso de resolução de problemas, onde (...) "Alguns [problemas] são fáceis, outros difíceis". Para o aluno "Foi uma experiência boa", na qual foram propostos bons problemas, motivadores e desafiantes, que originaram entusiasmo.

A opinião do aluno A5 sobre o SUB12 é de que para além de ter sido bem dinamizado, também "(...) é uma boa ideia, para cativar os alunos a gostarem mais de matemática". Face aos problemas propostos no campeonato, o aluno considerou os da fase de apuramento mais fáceis do que os da fase da final.

O aluno A6 defende a organização deste tipo de atividades matemáticas extracurriculares, dado que incentivam os alunos a estudarem matemática:

> “Eu acho que eles fazem bem organizar aqueles concursos, eu penso… eu acho este, o objetivo destes campeonatos é incentivar os estudantes… os alunos a… a estudar matemática”

Na ótica do aluno A6, os problemas propostos revelaram-se adequados à idade dos participantes e destacou a boa organização do campeonato, nomeadamente a rapidez do *feedback* dado pela equipa do SUB12, com o intuito de validar cada resolução dos problemas propostos na fase de apuramento.

Os problemas propostos pelo SUB12 são variados e transversais a todos os conteúdos curriculares, visando cobrir uma variedade de tópicos matemáticos (Números e operações, Geometria, Álgebra, Raciocínio lógico, Combinatória, etc.) destinados a alunos do 2.º ciclo do ensino básico, relacionados com os principais temas do programa de Matemática e em perfeita articulação com capacidades transversais – Resolução de problemas, Comunicação e Raciocínio (ME, 2007).

Os entrevistados consideram que os problemas com que se depararam no SUB12, cujo grau de dificuldade foi variável, fomentam a aprendizagem da matemática e colocam à prova os seus conhecimentos de matemática. Defendem, ainda, que os problemas são adequados e direcionados a todos os alunos, de acordo com o nível de ensino a que se destina o SUB12, tanto para os menos dotados matematicamente como para os talentosos. Para estes alunos, o *feedback* proporcionado pela equipa do SUB12, durante a fase de apuramento, teve um feito regulador, uma vez que lhes permitiu corrigir e completar as suas resoluções no sentido de serem melhoradas e validadas (Jacinto, 2008). Este tipo de *feedback* formativo permitiu compreender o raciocínio, as estratégias e formas de comunicar dos alunos, possibilitando-lhes, ainda, desenvolverem outras estratégias mais eficazes e eficientes para o processamento e compreensão dos problemas. A combinação entre um problema desafiador e a oportunidade para analisar soluções genuínas, para produzir *feedback* formativo, proporciona *insights* para avaliar e orientar os alunos na diversidade das suas estratégias e resoluções (LeBlanc & Freiman, 2011).

Todos os participantes consideram como um desafio participar no SUB12 (questão 7, tabela 41), como podemos confirmar através das razões invocadas por cada um:

	7- Participar no SUB12 é um desafio para ti? Porquê?
A1	É. Desenvolve o raciocínio e promove o contato com especialistas.
A2	É. Possibilita testar os conhecimentos adquiridos.
A3	É. Estimula o pensamento.
A4	É. Por querer ficar em primeiro.
A5	É. Pelos problemas e por querer ir mais longe.
A6	É. Estimula o pensamento e a persistência.

Tabela 41 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 7

> "É, Sem dúvida. Porque… é um campeonato de matemática. É como eu disse, desenvolvemos mais o raciocínio e estamos em contacto com pessoas que são especializadas em matemática e que com elas aprendemos muito, muito mais." (A1)
>
> "É. É um desafio para mim por causa que…. por causa que põe à prova os meus conhecimentos. Também porque, também porque posso aprender mais. É isso. (A2)
>
> "É. Porque há uns problemas em que é preciso pensar, tem de se estar com atenção, ver-se tudo. E é preciso pensar. (A3)
>
> "É. Porque nós tentamos ficar sempre no primeiro [lugar]. Tentamos sempre ficar em primeiro, mas… às vezes não acontece." (A4)
>
> "É. Por causa dos problemas e de querer ir mais à frente." (A5)
>
> "(...) Sim. Porque aquilo… às… às vezes havia problemas que eu tinha que pensar, levar para casa, ler outra vez e depois no dia seguinte é que eu tinha a resposta. Não desisto. (...)." (A6)

A maioria dos alunos inquiridos encara a participação no SUB12 como um desafio, o que de acordo com Leikin (2011) é central para a realização dos alunos matematicamente talentosos. Para os alunos, o desafio está na possibilidade de testarem as suas capacidades e conhecimentos matemáticos em contato com especialistas em matemática, conferindo rigor e mais profundidade matemática à resolução dos problemas, bem como estimulando a sua persistência para quererem chegar mais longe. A oportunidade de experimentação e de descoberta de forma independente permitidos pelo SUB12 potencia o grau de compreensão dos alunos e o seu envolvimento com a matemática, bem como a aquisição de novos conhecimentos (Taylor, 2008). O caráter desafiante do SUB12 na aprendizagem da matemática é um fator de enriquecimento que permite aos participantes exibirem as suas habilidades de uma maneira especial (Taylor, 2009). Neste sentido, a preparação dos alunos para competirem no SUB12 pode ter um poderoso impacto positivo na vida académica dos alunos (Treffinger, 2008).

Relativamente ao elemento de competição envolvido no campeonato e ao que significa para eles a competição, percebe-se que a maioria dos alunos associa a competição a sentimentos de satisfação e mesmo de regozijo pela vitória (questão 8, tabela 42). De um modo geral, são jovens que revelam um sentimento de confiança nas suas potencialidades e nas suas capacidades. Valorizam ainda o facto de vencerem, ainda que para alguns esse não seja o elemento mais importante.

	8- Quando pensas em competição qual das seguintes palavras está de acordo com o que sentes: 1 ganhar, 2 ansiedade, 3 rivalidade, 4 satisfação. Porquê?
A1	"Satisfação" de chegar o mais longe possível.
A2	Competir provoca "Ansiedade".
A3	"Satisfação" de ganhar.
A4	"Ansiedade" de ganhar.
A5	Competir gera "Satisfação".
A6	"Ganhar" implica ser superior.

Tabela 42 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 8

Satisfação é o que sentem os alunos A1 e A5, quando pensam em competição (questão 8, ver anexo 6):

> "Satisfação. Porque chegar a uma final é muito bom, fico satisfeita. Porque o trabalho que eu fiz ao longo dos meses, resolver problemas de matemática, trabalhar naquilo, foi muito bom. Daí eu estar na final. E depois dá-me satisfação porque não é importante sempre ganhar, mas já vou à final, já participo e já resolvo problemas mais difíceis com os melhores também." (A1)

> "Satisfação. Por… a… porque eu gosto de competir em coisas… em campeonatos matemáticos. (...)" (A5)

Para muitos alunos o objetivo principal neste tipo de competição não é exclusivamente vencer, pois só o facto de serem selecionados e participarem já é uma motivação que afasta a desilusão da derrota (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004).

Já para os alunos A3 e A6, pensar em competição significa ganhar:

> "Satisfação por estar na competição mas também ganhar porque… Se calhar, é mais ganhar. É ganhar porque qualquer um gosta de ganhar, de ficar à frente dos outros. (...)" (A3)

> "Ganhar. Porque nós a… porque nós a… porque quando nós ganhamos, significa que somos superiores aos outros." (A6)

O desejo de competir e superar desafios está enraizado na natureza humana e tem sido utilizado desde há séculos para a ajudar as pessoas a melhorar as suas habilidades e o seu desempenho em várias atividades (Kenderov, 2006). O SUB12 é uma atividade competitiva que se destaca pelas oportunidades de realização do potencial individual, intelectual e criativo dos alunos (Koichu & Andzans, 2009), relacionadas com a resolução de problemas.

Aos alunos A2 e A4, pensar em competição, provoca-lhes ansiedade:

> "(...) Ansiedade mais. Porque quando nós estamos a pensar nisso ficamos ansiosos, ter o problema, conseguir ir, começar a resolvê-lo." (A2)

> "Ansiedade. Ansioso que ganhe." (A4)

O SUB12 e o conhecimento matemático

Todos os participantes assumem que o SUB12 é uma atividade importante para o seu desempenho em Matemática (questão 9, tabela 43), ainda que por diferentes razões. Uma vez mais alguns dos entrevistados salientam o facto de aprenderem formas novas de resolver problemas.

	9- Achas que esta atividade é importante para o teu desempenho na disciplina de Matemática? Explica porquê.
A1	Sim. Fomenta a aprendizagem e a aquisição de conhecimento matemático.
A2	Sim. Fomenta a aprendizagem e aquisição de conhecimento matemático.
A3	Sim. Ajuda a melhorar a capacidade de resolver problemas.
A4	Sim. Permite melhorar a capacidade de resolver problemas.
A5	Sim. Possibilita a apropriação de diferentes formas de resolver problemas.
A6	Sim. Desenvolve o raciocínio e a comunicação. Promove a apropriação de diferentes formas de resolver problemas.

Tabela 43 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 9

A aluna A1 considera que a participação no SUB12 fomenta a aprendizagem da matemática e que, mais tarde, pode ser usada dentro e fora da sala de aula:

> "É, sem dúvida. Porque… por exemplo os meus colegas não tiveram esta oportunidade, onde aprenderiam mais a matemática e, e eu e a minha colega sim. E no futuro vai ser muito bom para podermos aplicar tudo o que aprendemos ao longo destes meses… no futuro." (A1)

Participar no SUB12, possibilita ao aluno A4 resolver melhor e mais rapidamente problemas, para além de que é uma atividade que permite melhorar todas as capacidades matemáticas:

> "Sim. Sim. Em resolução de problemas. (...) Assim consigo resolver melhor… mais rápido os problemas. (...)" (A4)

Os alunos A5 e A6 salientam que a sua participação no SUB12 tem consequências no seu desempenho na disciplina de Matemática, dado que promove o desenvolvimento do raciocínio e a apropriação de um vasto leque de diferentes formas de resolver problemas:

> "Sim, acho que sim porque desenvolve… acho que desenvolve o nosso raciocínio, resolver estes problemas assim (...) o nosso cérebro. Às vezes, quando nós resolvemos problemas diferentes já começamos a ter… mais formas de resolver outros problemas. (...)" (A6)
>
> "É. Porque ao surgirem mais problemas, vou arranjar mais novas formas de os resolver. (...)" (A5)

Face à questão levantada pelo entrevistador, relacionada com a capacidade de comunicação, o aluno A6 concorda que a sua participação no SUB12 espoleta esta habilidade e exemplifica de forma concreta, como podemos ver a seguir:

> (...) tive um teste das frações que era para dizer o que representava a expressão [indicada] e havia colegas meus na escola que não conseguiam expressar-se, mas eu consegui."

Para o aluno A2, a sua participação no SUB12 potencia a sua aprendizagem e o seu conhecimento matemático, bem como o reconhecimento por parte da professora:

> "Acho. Porque assim, porque assim também consigo ter mais conhecimentos, aprendo mais. A minha professora também tem em conta o esforço, pronto."

O aluno A3, defende que a sua participação no SUB12 lhe permite melhorar na atividade de resolver problemas, com reflexos em sala de aula:

> "Porque o SUB12 … também tem problemas e eu vou melhorando com isso. (...) Acho que me ajuda porque ao fazer problemas vou também melhorando a minha maneira de resolver problemas e depois posso aproveitar… é isso. Posso aproveitar nas aulas o que aprendi no SUB12, por assim dizer." (A3)

Com base nas afirmações dos alunos entrevistados, a participação no SUB12 constitui um reforço dos conhecimentos adquiridos em sala de aula, nomeadamente no que diz respeito a pôr em ação capacidades transversais, como por exemplo, resolver problemas, comunicar e raciocinar (Harrison, 2006). O sentido de descoberta e experimentação caraterísticos do SUB12 potenciam a aquisição de novos conhecimentos (Taylor, 2008). Desta forma, a experiência de participação em competições de resolução de problemas constitui um complemento natural ao trabalho realizado em sala de aula (Koichu & Andzans, 2009).

De uma forma geral, todos os alunos consideraram que é preciso ter conhecimentos de conteúdos de Matemática para resolver problemas (questão 10, tabela 44). No entanto, acreditam que os problemas de lógica podem ser resolvidos sem conhecimento matemático.

	10- Para resolver os problemas do SUB12 é preciso conhecer conteúdos de matemática? Porquê?
A1	Sim. Sem conhecimento é difícil resolver os problemas do SUB12.
A2	Sim. O trabalho com percentagens requer conhecimentos acerca do assunto.
A3	Depende. Uns precisam de conhecimento, outros basta pensar (lógica).
A4	Depende. Na maior parte dos problemas é preciso domínio de conteúdos.
A5	Sim. Na fase da final ainda mais, dada a complexidade dos problemas.
A6	Depende. Os problemas de lógica podem ser resolvidos sem conhecimento.

Tabela 44 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 10

Para o aluno A1, a falta de conhecimento de conteúdos de matemática é "Sem dúvida (...)" uma barreira limitadora ao sucesso na resolução de problemas do SUB12. O aluno A5, partilha a posição do aluno A1, referindo que:

> "Sim. (...) É sempre preciso conhecimentos de matemática. [Na fase da final] Ainda mais. Por causa que [os problemas] eram mais complexos." (A5)

O aluno A2, justifica o recurso ao conhecimento de conteúdos matemáticos, para resolver problemas do SUB12, com um exemplo concreto:

> "De certa parte é. Porque por exemplo, se um problema tem a ver com percentagens, nós temos que ter dado percentagens na disciplina de matemática."

Embora, na generalidade, os alunos assumam que para resolver os problemas do SUB12 é necessário dominar conteúdos matemáticos, os participantes A3 e A4 não descartam a possibilidade de haver problemas que possam ser resolvidos, sem recorrer ao conhecimento matemático:

> "Sim porque há alguns problemas [em] que era preciso [conhecer conteúdos de matemática]. Havia uns [problemas] que eram mais de pensar e isso… que não era preciso muito [conhecimento de conteúdo matemático]. Mas havia outros que era preciso." (A3)

> "Sim. (...) Só sei que a maior parte deles [dos problemas do SUB12] era preciso [ter conhecimento de conteúdos matemáticos]." (A4)

Inicialmente, o aluno A6 defendeu a tese de que para resolver os problemas do SUB12 seria preciso o conhecimento de conteúdos matemáticos:

> "É… acho que sim. Para todos. Se não tivermos conhecimento básico, por exemplo, as contas de dividir…ah… os metros cúbicos… essas unidades, não se conseguia resolver os problemas."

Mas um pouco depois, o aluno A6 consentiu que alguns dos problemas com que se confrontou no SUB12 poderiam ser resolvidos sem conhecimento matemático:

> "Sim, houve lá… uns sim, que era lógica, houve lá problemas que era… era lógica."

Tendo em conta os relatos dos entrevistados, o conhecimento influencia a compreensão dos problemas, tal como a escolha das estratégias de resolução. Neste sentido, resolver problemas sem um certo domínio do conhecimento não é fácil (Subramaniam & Chia, 2007). Nomeadamente, o conhecimento prévio é uma das ferramentas que os alunos possuem para desenharem estratégias poderosas para atacarem os problemas. O conhecimento prévio é a espinha dorsal para a organização de novas informações e determina em que medida são exploradas e desenvolvidas no estudo de conceitos matemáticos (Sheffield, 2009). E, portanto, é de extrema importância saber decidir quando e como utilizar o conhecimento anterior para gerar conhecimento novo (Sternberg, 2007). Os indivíduos que revelam grande capacidade de dominar e usar o conhecimento que possuem para gerar conhecimento novo, têm tendencialmente mais capacidade para serem criativos (Sternberg, 2008). Desta forma, o SUB12 como um contexto competitivo de resolução de problemas, é vantajoso para aprofundar a relação entre os alunos e os conteúdos de Matemática (Freiman, 2009). Como mostram as respostas dos alunos, eles revelam uma consciência de que o conhecimento matemático é essencial para a resolução de problemas, mostrando assim que veem a proficiência matemática (conceitos e conteúdos) como uma vantagem.

Quando foi preciso indicar as maiores dificuldades que surgiram na resolução dos problemas do SUB12 (questão 11, tabela 45), os alunos referiram o seguinte:

> "Aaa… por exemplo, perceber o problema. Às vezes bloqueava, era muita informação logo. Não conseguia logo resolver o problema, era preciso ler muitas vezes, era mais essa dificuldade. (...)" (A1)

> "Foi… o modo como os problemas eram feitos, de compreender o enunciado. Foi, mais ou menos." (A2)

> "Quais foram os mais difíceis? Não sei. Alguns. Não conseguia ter um… uma resolução lógica do problema. E depois sempre que voltava

a trás, não conseguia resolver de novo. Tentei resolver várias vezes até que cheguei a um ponto que consegui resolver. (...) [Inicialmente] (...) não utilizei a estratégia correta. (...)" (A5)

"(...) Ah… houve um… ah… não muitas [dificuldades]. (...) Houve uma em que (...) que essa aí eu fiz uma baralhação. Porque eu não estou muito habituado a utilizar essas [representações] do 50%. Mas era fácil depois. (...)" (A6)

	11- Ao resolver problemas do SUB12, quais foram as maiores dificuldades que surgiram? Indica-as.
A1	Boqueio ao nível da interpretação.
A2	Compreender os enunciados.
A3	Quando surgiram resolveu empenhando-se mais intensamente.
A4	Raramente. Quando surgiram dificuldades facilmente foram superadas.
A5	Estratégia de resolução, por vezes, desadequada.
A6	Domínio de determinadas formas de representação.

Tabela 45 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 11

O aluno A3, assumiu que "(...) houve um ou outro [problema] que foi mais difícil [de resolver] (...), o que o levou a debruçar-se e a empenhar-se mais intensamente, ultrapassando as dificuldades, sem ajuda.

O aluno A4, refere raramente ter sentido dificuldades na resolução dos problemas do SUB12 e quando teve foram facilmente superadas, sozinho ou com ajuda da mãe, sem se lembrar, especificamente, que tipos de dificuldades sentiu:

"Não. Algumas, mas… Já não me lembro."

Face às dificuldades manifestadas pelos entrevistados, verifica-se que na generalidade foram ultrapassadas, permitindo constatar o que a comunidade de investigação comummente defende na definição de problema, ou seja, uma atividade para a qual não se vislumbra a solução ou mesmo uma estratégia de resolução aparentemente imediata. O contrário, ou seja, a ausência de dificuldades poderia levar a concluir que as tarefas propostas não refletiam verdadeiramente problemas, mas meramente exercícios matemáticos. Portanto, a matemática torna-se mais interessante se for apresentada como sendo algo mais do que os conteúdos, com a possibilidade de os alunos usarem todos os métodos e estratégias ao seu alcance para compreender, abordar e resolver problemas (Zazkis & Holton, 2009). No caso do SUB12, permite aos participantes usarem os seus próprios métodos (Hamza & Griffith, 2006) e conhecimentos para ultrapassar as barreiras e dificuldades que emergem durante a competição. Esta liberdade de ação favorece o emergir e desenvolvimento criatividade matemática (Mann, 2006). Sendo assim, o SUB12 é uma realidade para os alunos colocarem em prática a sua criatividade matemática, dado que lhes permite irem além da replicação de estratégias, possibilitando-lhes pensar de uma forma mais pessoal (Mann, 2006).

Os participantes confessam ter tido ajuda na resolução dos problemas do SUB12 (questão 12, tabela 46) durante a fase de apuramento, quando se depararam com dificuldades:

> "(...) Sim. A professora ajudava, assim um empurrãozinho (...) por exemplo, líamos o, o problema juntas e depois íamos fazendo um esquema e depois as duas íamos vendo como é que, como é que podíamos chegar à resposta." (A1)
>
> "(...) a professora de matemática… sim ajudava-nos sempre. Líamos os problemas, depois ela dava sempre pistas sobre como ou não resolver o problema." (A2)
>
> "Às vezes. Do meu pai, só. Quando eu não estava a conseguir resolver, eu pedia que me desse uma ajuda para me impulsionar para eu conseguir resolver. Dizia-me algumas coisas [através de dicas]..." (A3)

	12- Durante a fase de apuramento tiveste ajuda na resolução de problemas? De quem?
A1	Sim. Da professora ao nível da interpretação.
A2	Sim. Da professora ao nível da interpretação e através de dicas.
A3	Sim. Do pai, através de dicas.
A4	Sim. Da mãe, através de dicas.
A5	Sim. Dos pais e das professoras, através de pistas e dicas.
A6	Sim. Da professora, através de dicas.

Tabela 46 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 12

> "Da mãe. Em alguns problemas que tinha às vezes dificuldade. Dava uma dica." (A4)
>
> "Sim. Mais ou menos. Dos meus pais e da professora. Como não estava a conseguir ter a resolução do problema, eles ajudavam-me a fazer com que isso se tornasse claro [através de pistas e dicas]." (A5)
>
> "Tive só num problema. [ajuda] Da professora. (...) E houve uma… que eu não conseguia fazer, que era… agora não me estou a lembrar qual é. (...) Deu-me dicas sim, para ir fazendo." (A6)

O tipo de ajuda de que os participantes beneficiaram fomentou o sentido de autonomia, dado que as pistas e dicas não foram limitadoras da liberdade de ação dos alunos. O tipo de ajuda prestado fomentou a apropriação de diferentes estratégias de resolução complementares às dos alunos, aumentando o seu reportório de ferramentas para resolver problemas. Portanto, o SUB12 estimulou um ambiente criativo, que permitiu trabalhar e pensar numa atmosfera livre de *stress* e ansiedade e sem medo de errar, através de um *feedback* caraterizado por dicas e pistas, possibilitando a aceitação e exploração de erros e enganos como medidas ativas no caminho para uma solução, bem como a tolerância e valorização de pensamentos incomuns, ideias originais e produtos criativos (Urban, 2007).

Relativamente às ideias gerais que alimentam acerca da Matemática, os entrevistados escolhem principalmente as palavras "entusiasmo", "raciocínio" e "números". Nota-se, portanto, uma grande valorização do raciocínio matemático por parte destes jovens que gostam de resolver problemas por prazer e que se sentem entusiasmados com a Matemática.

Quando pensam em Matemática, as participantes A1 e A3 escolhem a palavra entusiasmo (questão 13, ver tabela 47), pelas seguintes razões:

> "Entusiasmo. Porque é exatamente isso que a matemática me dá. (...)" (A1)
>
> "Entusiasmo. Porque… Porque é entusiasmante fazer problemas e isso…" (A3)

	13- Quando pensa em matemática qual das seguintes palavras está de acordo com o que sentes: 1números, 2 raciocínio, 3 beleza, 4 entusiasmo. Porquê?
A1	A matemática provoca entusiasmo.
A2	Raciocínio. É importante para resolver problemas.
A3	Resolver problemas entusiasma.
A4	Raciocínio. É importante para o pensamento matemático.
A5	Raciocínio. É das capacidades mais importantes em matemática.
A6	Números. A matemática é basicamente números.

Tabela 47 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 13

Já os participantes A2, A4 e A5 escolhe a palavra raciocínio:

> "Raciocínio. Porque para… Nós temos que ter raciocínio para conseguir resolver os problemas. Permite… a uma pessoa que tem mais raciocínio conseguir chegar à resolução mais rapidamente, depressa e melhor." (A2)
>
> "Raciocínio. Porque na matemática temos sempre de… pensar senão… senão, não se chega aos resultados necessários." (A4)
>
> "Raciocínio. Por causa que é aquilo que é… é uma das coisas que eu… é a coisa que eu acho mais importante na matemática." (A5)

Finalmente, a aluna A6 escolheu a palavra números, porque considera que são a forma de representação básica da matemática:

> "Números. Ah… Porque a matemática basicamente são números e ..." (A6)

Originalidade e resolução de problemas

Todos os participantes consideram ter encontrado, ao longo do campeonato SUB12, problemas com diferentes formas de resolução possíveis (questão 14, tabela 48) no entanto apenas o aluno A5 conseguiu indicar um exemplo com o qual se deparou durante a fase de apuramento, da edição 2009/2010:

> "Sim, sim. Acho que o problema zero, era sobre as cadeiras… acho que esse aí tinha várias formas de o resolver. Utilizei várias formas. (...)

Embora o aluno assuma ter resolvido o problema de diferentes formas, não se lembrava das estratégias usadas para as descrever.

	14 - Achas que um mesmo problema de matemática pode ter várias formas de resolução diferentes? És capaz de me dar um exemplo? Encontraste algum durante o campeonato SUB12?
A1	Sim.
A2	Sim
A3	Sim.
A4	Sim
A5	Sim. O problema das cadeiras.
A6	Sim, embora o resultado final seja o mesmo.

Tabela 48 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 14

O aluno A3, não indicou qualquer exemplo que tenha encontrado no SUB12, mas reconheceu que a sua forma de resolver não é única para um mesmo problema:

> "Acho. Havia problemas que para mim… eu normalmente gosto de escrever, porque me ajuda, mas podia-se ter feito logo com esquemas ou por tentativa e erro."

O aluno A6, defende que embora haja diferentes formas de resolver um determinado problema, todas convergem para o mesmo resultado:

> "A matemática tem várias formas, mas só tem um resultado, não há mais resultados. (...) Há vários caminhos... mas só há um resultado. (...)"

A diversidade de formas de resolução, que os alunos admitem ter encontrado nalguns problemas propostos pelo SUB12, ajudou a que pudessem considerá-los a partir de diferentes perspetivas (Baran, Erdogan, Çakmak, 2011). Muitas vezes, a criatividade matemática é evidenciada quando os alunos têm a possibilidade de combinar diferentes modos de pensar num problema (Hashimoto, 1997). Esta capacidade carateriza alunos que revelam flexibilidade de pensamento matemático, dado que são detentores de uma ampla gama de estratégias de resolução, que lhes permite resolver problemas de diferentes formas (Budak, 2012). A flexibilidade de pensamento permite aos alunos olharem os problemas de maneiras diferentes, evitando a ênfase apenas em algoritmos, regras e procedimentos (Nadjafikhaha, Yaftianb & Bakhshalizadehc, 2012). Permite-lhes modificar e adaptar estratégias e recursos para corresponderem à exigência das tarefas, conseguindo usar várias técnicas diferentes para encontrar uma resposta (Demetriou, 2004). Pode-se concluir que os problemas propostos no SUB12 criam oportunidades para serem analisados e trabalhados sob diferentes perspetivas, possibilitam múltiplas soluções, diferentes métodos de resolução e a aprendizagem de novas ideias matemáticas (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009).

É interessante constatar que os alunos entrevistados são heterogéneos na resposta à questão de tentarem ou não ser originais nas suas resoluções (questão 15, tabela 49). Para uns, essa evidência de criatividade é importante e é vista como algo que pode ser reconhecido pelos outros; para outros, obter a solução correta é o mais importante; e ainda para outros a criatividade é importante mas é colocada em segundo plano.

	15- Preocupaste em ser original nas tuas resoluções? Porquê?
A1	Não, mas recorre a estratégias próprias.
A2	Não. É mais importante encontrar a solução.
A3	Sim, porque permite usar as próprias estratégias.
A4	Não. O que importa é encontrar a solução.
A5	Sim, porque possibilita ser criativo.
A6	Não. O que importa é encontrar a solução.

Tabela 49 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 15

Os alunos A3 e A5, revelam preocupação em ser originais quando resolvem problemas:

> "Sim. Porque me ajuda a resolver, ser assim mais… fazer à minha maneira, acho que é mais fácil para mim resolver." (A3)

> "Sim. Para… pronto… mostrar que sabia resolvê-los de uma forma mais criativa. (...)" (A5)

Nem sempre as alunas A1 e A2 se preocupam com a originalidade quando resolvem problemas, apesar da suas resoluções, por vezes, se revelarem únicas quando comparadas com as dos seus colegas. As duas alunas admitem, na maioria das vezes, recorrerem às estratégias que aprenderam nas aulas, desenvolvidas pelos colegas ou pela professora, para resolver problemas:

> "Mais ou menos. Não tento ser assim tão original, vou pela minha estratégia. (...) muitas vezes aplico as [estratégias] da aula de matemática." (A1)

> "A primeira coisa que me preocupo é encontrar a solução e depois se tiver tempo, volto ao problema e tento, tento por mais maneiras, ver mais maneiras possíveis." (A2)

Já as alunas A4 e A6, não se preocupam com a originalidade das suas resoluções quando resolvem problemas. Principalmente para a aluna A6, "(...) o que interessa é… era chegar ao resultado certo no final".

Embora nem todos os participantes se preocupem em ser únicos quando resolvem problemas, revelam saber o que é uma resolução original (questão 16, tabela 50):

	16- O que é para ti uma resolução original?
A1	Avançada ou nunca pensada.
A2	Avançada e diferente das outras.
A3	Diferente das outras.
A4	Diferente das outras.
A5	Método diferente do habitual.
A6	Fora do vulgar.

Tabela 50 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 16

> "É por exemplo,… ai como é que eu hei de dizer? É conseguirmos arranjar uma forma para resolver um problema que até aquele momento já é demasiado desenvolvida para o que estamos a aprender. Ou então nunca tínhamos pensado nisso." (A1)

> "É uma resolução… que nós, assim, avançada para… avançada e que… que não seja tão igual às outras. (...) mais um pouco diferente. (A2)

> "Uma que é diferente das outras… é isso. Que é diferente, que não é como as outras, que é…" (A3)

> "Uma resolução boa, diferente de todas as outras." (A4)

> "É uma resolução onde se usa… a… um método para o resolver diferente do que seria habitual. Próprio, meu." (A5)

> "É uma resolução que ninguém fez, que ninguém fez. Uma resolução que é fora do invulgar [do vulgar]." (A6)

Apesar de nem todos alunos se preocuparem em criar resoluções originais quando resolvem problemas, revelam um claro sentido sobre o conceito de originalidade. Para eles, uma resolução original é um processo que consiste na habilidade de produzir ideias incomuns (invulgares) e diferentes, para obter produtos invulgares (Runco, 2004b).

Na generalidade, os participantes confirmam que os seus professores valorizam os seus produtos originais quando resolvem problemas (questão 17, tabela 51).

	17- Na disciplina de matemática o teu professor valoriza a originalidade dos alunos?
A1	Sim.
A2	Sim.
A3	Sim.
A4	Às vezes.
A5	Sim.
A6	Sim.

Tabela 51 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 17

Apenas o aluno A6, refere que a valorização da criatividade não se reflete nas notas que o professor atribui, apenas recorre às estratégias incomuns dos alunos para mostrar aos restantes diferentes formas de resolução:

> "Sim, a… a… por exemplo, fica contente por nós termos encontrado novas formas. Sim, muito." (A1)
>
> "Valoriza. Fica contente. (...)" (A2)
>
> "Sim. A professora gosta que nós sejamos originais e que saibamos sempre, em todos os problemas, ter uma maneira de resolvê-los." (A3)
>
> "Mais ou menos. (...) Sim. Às vezes. Às vezes, sim." (A4)
>
> "Sim." (A5)
>
> "(...) Sim, a minha professora, normalmente, quando há um problema ou um exercício, quando tem várias formas de resolução, mete os dois no quadro. Sim, mas na nota não [valoriza]." (A6)

Segundo os entrevistados, é possível constatar que os seus professores valorizam pensamentos incomuns, ideias originais e produtos novos, mostrando a importância dos esforços individuais para encontrar uma solução e não apenas o produto final, evidenciando que a personalidade dos alunos, também, é apreciada e levada a sério (Urban, 2007). Os professores que entendem que a criatividade implica originalidade, estão em melhor posição para integrar a criatividade dos alunos no currículo todos os dias, de forma a complementar a aprendizagem escolar (Beghetto & Kaufman, 2013).

Representações na resolução de problemas

Dependendo do problema (questão 18, ver tabela 52), os participantes defendem não só o uso de números e cálculo na resolução de problemas, mas também o recurso a esquemas, desenhos, tabelas, gráficos, figuras, quadros, destaques e cores, etc., por considerarem que todas as formas de representação podem facilitar o processo de chegar às soluções:

	18- Achas importante, na Resolução de problemas, usar apenas o cálculo, ou usar também esquemas, desenhos, tabelas, gráficos, figuras, quadros, destaques e cores, etc.? Porquê?
A1	Tudo. Dependendo do problema.
A2	Tudo. Pode facilitar a explicação da resolução.
A3	Tudo. Pode facilitar a resolução.
A4	Tudo. Por vezes é necessário.
A5	Tudo. Facilita a resolução.
A6	Tudo. Possibilitam mais opções.

Tabela 52 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 18

> "Ambos. Porque depende do problema. Podemos utilizar as duas coisas [refere-se a tudo]. Há certos problemas que são só [resolvidos através de] esquemas, por exemplo, aquele, por exemplo, que era dos caminhos, da final [problema número um, Sempre a passear..., do conjunto da fase da final]. Também dava cálculos, mas também fazendo um esquema, vendo um caminho com outro e depois voltar, também dava com esquemas." (A1)

> "Usar o cálculo e tudo o resto. Porque, por exemplo, um problema pode ser mais fácil… podemos explicar melhor utilizando esquemas, utilizando cálculos, utilizando gráficos." (A2)

> "Sim, acho que tudo porque às vezes com tabelas, cores e essas coisas pode ajudar a levar à resposta. Acho que há uns que só com cálculo consegue-se chegar lá facilmente, mas que também se pode usar tabelas e isso." (A3)

> "Tudo. Porque às vezes é necessário." (A4)

> "Acho que é necessário utilizar essas… essas… os gráficos e isso. Facilita a resolução." (A5)

> "Destaques com cores, isso assim já não. Mas… ah… figuras… às vezes as pessoas, há pessoas que não são tão minuciosas, assim com cálculos. Fazem desenhos, mas chegam ao mesmo resultado. É importante saber as duas formas, porque às vezes pode, pode… podemos não conseguir chegar ao resultado por contas. Fazemos por desenhos." (A6)

As representações e a capacidade de as usar adequadamente fazem parte integrante da aprendizagem da Matemática (Scheuermann & Garderen, 2008) e devem ser pensadas como ferramentas para a atividade cognitiva, em vez de produtos ou o resultado final de uma tarefa (Pape & Tchoshanov, 2001). Constituem um importante veículo para a aprendizagem e comunicação, sendo ferramentas vitais para registar, analisar, resolver e comunicar, a propósito de problemas e ideias matemáticas (Preston & Garner, 2003). A capacidade de utilizar múltiplas representações promove o sucesso na resolução de problemas (Gagatsis, 2004). O uso de múltiplas representações facilita o desenvolvimento de conceitos matemáticos e os esforços dos alunos para encontrar uma solução (Pape & Tchoshanov, 2001). O recurso a diferentes representações, por exemplo, visuais ou simbólicas, melhoram as habilidades matemáticas, como a capacidade de resolver problemas e o raciocínio avançado dos alunos (Pape & Tchoshanov, 2001). Os participantes entrevistados demonstram, com as suas palavras, cultivar a flexibilidade de representação, já que não descuram recorrer a diferentes formas de representação para resolver problemas, assumindo que no seu conjunto funcionam de forma facilitadora e complementar. E por serem capazes de recorrer a uma variedade de representações e por terem consciência de que estas são úteis e têm funções com sentidos complementares, são mais propensos a resolver problemas de forma criativa e inovadora (Sheffield, 2009).

Perante a questão 19 (Tabela 53), os participantes assumem que as diferentes formas que usam para resolver problemas, sem recorrer exclusivamente ao cálculo, são valorizadas em sala de aula.

	19- Nas aulas de matemática sentes que estas diferentes formas de resolver problemas são valorizadas, sem recorrer apenas ao cálculo?
A1	Valoriza.
A2	Valoriza.
A3	Valoriza.
A4	Valoriza.
A5	Valoriza.
A6	Valoriza.

Tabela 53 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 19

Perante esta realidade é possível constatar que os professores dos entrevistados incentivam a sua criatividade, uma vez que disponibilizam e fomentam uma variedade de estilos diferentes de representação na resolução de problemas (Freiman, 2009). Para muitos professores, o recurso a múltiplas representações é benéfico para a aprendizagem, uma vez que suportam ideias e processos e promovem uma compreensão mais profunda das tarefas e dos conteúdos (Ainsworth, 1999). Para além disso, a flexibilidade de representação é uma caraterística do pensamento criativo que constitui um aspeto da criatividade com clara relevância na resolução de problemas matemáticos e que consiste na capacidade de superar a rigidez de pensamento matemático e quebrar conjuntos mentais formatados (Haylock, 1997).

Raciocínio na resolução de problemas

Apenas o aluno A3 assume ter mais satisfação em encontrar a resposta a um problema, do que propriamente na construção do raciocínio para chegar à solução (questão 20, tabela 54). Todos os outros atribuem uma importância incontornável ao raciocínio, quer do ponto de vista da mobilização de conhecimento quer em termos de explicação do processo utilizado.

	20- O que é que te dá mais satisfação: encontrar a resposta ou a construção do raciocínio para chegar à resposta?
A1	O raciocínio. Porque possibilita mostrar domínio de conhecimento.
A2	O raciocínio. Porque é importante explicar como chegar à resolução.
A3	A resposta. Permite resolver o problema.
A4	O raciocínio. Para explicar o processo utilizado.
A5	O raciocínio. Permite resolver problemas difíceis com diferentes soluções.
A6	O raciocínio. É importante para a aprendizagem e não suscita dúvidas

Tabela 54 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 20

> "(...) É mais o processo sim. Dá-me mais satisfação, porque devemos demonstrar aquilo que sabemos e o raciocínio para chegar à resposta. Não é só meter ali a resposta (...)" (A1)

> "A construção do raciocínio para chegar à resposta do problema. (...) se eu chegar logo à resposta e não conseguir explicar, aí não me dá satisfação por causa que a resposta não é o mais importante se não explicarmos como chegamos lá. (...)" (A2)

> "Encontrar a resposta. (...) Lá por me dar mais felicidade encontrar a resposta não quer dizer que não tenha feito o raciocínio." (A3)

> "A construção [do raciocínio]. Fazer cálculos, esquemas… tabelas. Para explicar [o processo utilizado]". (A4)

> "A construção do raciocínio. Porque… pronto, eu prefiro daqueles problemas mais difíceis, do que fáceis, porque a… pronto, porque estou sempre a tentar encontrar a solução. E ao tentar encontrar a solução, eu tento encontrar outras soluções." (A5)

> "A construção do raciocínio. Porque nós vamos apanhar mais tarde problemas mais complicados e o nosso cérebro [nessa altura] já tem, já está habituado a ter mais raciocínio. (...) Para os professores, é para ver

se os alunos não copiaram. E pra, pra nós é para nós aprendermos a fazer as coisas certas… e para aprendermos a matéria.” (A6)

De acordo com os testemunhos, os entrevistados são alunos que gostam de resolver problemas que incentivem a necessidade de expressão e comunicação dos raciocínios utilizados e a construção de significados, os seus entendimentos pessoais e formas alternativas de ver as coisas (Irish National Teachers' Organisation, 2009). Geralmente, procuram clareza durante a explicação dos raciocínios utlizados (Sheffield, 2008), recorrendo a uma variedade de representações, de modo a que os seus processos de pensamento sejam facilmente compreendidos. O seu raciocínio matemático criativo revela-se pela habilidade de perceber e dar forma a estratégias de resolução (Milgram & Hong, 2009).

Quase todos os participantes revelaram gostar de resolver problemas que os fazem pensar mais (questão 21, tabela 55). Apenas a aluna A1 confidenciou preferir resolver os problemas mais fáceis.

	21- Preferes os problemas que resolves mais facilmente ou aqueles que te fazem pensar mais? Porquê?
A1	Mais fáceis. Não dão muito trabalho.
A2	Pensar mais. Geram satisfação e alargam os conhecimentos.
A3	Pensar mais. Melhoram a capacidade de resolver problemas.
A4	Pensar mais. Não são rotineiros.
A5	Pensar mais. Permitem encontrar diferentes métodos de resolução.
A6	Pensar mais. Desenvolvem o raciocínio.

Tabela 55 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 21

Embora a aluna consinta que resolver problemas mais difíceis permite desenvolver o raciocínio e o poder de comunicação, assume ser preguiçosa e gostar do que é mais fácil, não só na resolução de problemas.

“Mais facilmente. Porque assim não é tanto quebra-cabeças.” (A1)

“Aqueles que me fazem pensar mais. Porque depois de os conseguir resolver fico mais contente comigo mesma e sei que… e alargo os meus conhecimentos e sei que consigo resolver mais facilmente os mais fáceis.” (A2)

“Pensar mais, porque ao fazer aqueles [que fazem pensar] acho que melhora a minha maneira de fazer problemas e isso…” (A3)

“Os que me fazem pensar mais. Duram mais tempo. São mais difíceis. Os outros… os outros… resolvem-se num instante, depois é um bocado chato estar sempre a fazer a mesma coisa.” (A4)

> “Aqueles que me fazem pensar mais. Por aquilo que eu já disse. Que… ao estar mais tempo a fazer um problema eu, depois de o resolver, consigo encontrar novos métodos [de resolução].” (A5)

> “Pensar mais. Porque… porque assim vamos aprender a raciocinar … ah… com… ah… para outros problemas, vamos raciocinar com… ah… vamos… resolver o problema com mais rapidez… mais tarde.” (A6)

Vários dos entrevistados respondem à questão de ficarem ou não a pensar no mesmo problema de forma afirmativa. Estes dizem que o continuar a pensar tem a ver com a procura de outras formas de resolução. Há também outros alunos que depois de resolverem um dado problema preferem passar a outro problema.

Dependendo do tempo e dos problemas (questão 22, ver tabela 56), a aluna A2 afirma que prefere pensar sobre um mesmo problema, na tentativa de encontrar possíveis soluções ou formas de resolução diferentes:

> “Se tiver tempo prefiro pensar sobre ele e arranjar novas maneiras. E se não tiver tempo passo a outro rapidamente. Depende dos problemas, alguns que me entusiasmam mais do que outros.” (A2)

Já o aluno A5, assume que só passa ao problema seguinte quando todas as hipóteses para o anterior estiverem esgotadas:

> “Eu só passo à resolução de um diferente quando tiver… quando tiver totalmente a certeza… Não [passo ao seguinte]. Tento resolvê-lo de outra maneira. (...)” (A5)

	22- Sempre que resolves um problema continuas a pensar sobre ele ou preferes passar à resolução de outro diferente?
A1	Passa à resolução de outro diferente.
A2	Se tiver tempo continua e tenta encontrar novas soluções.
A3	Só tenta resolver de formas diferentes se lhe for pedido.
A4	Embora passe a outro problema fica a pensar no anterior.
A5	Tenta resolver de formas diferentes.
A6	Passa à resolução de outro diferente

Tabela 56 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 22

Embora o aluno A5 refira que costuma pensar no problema anterior quando está a resolver o seguinte, só o faz até ter a certeza de que está correto. Quando obtém a confirmação, deixa de pensar sobre o problema resolvido e avança para outro. Os restantes participantes preferem passar ao problema seguinte quando encontram a solução do anterior. O aluno A3 só tenta encontrar diferentes formas de resolver o mesmo problema se tal lhe for solicitado, caso contrário avança para o seguinte:

> “Às vezes prefiro passar [a outro] para não estar sempre a pensar e perder tempo. Passo assim à frente para ver se, se apanho outros assim mais, com mais facilidade. Sim. (...)” (A1)

> “Se já está resolvido, normalmente releio todo o problema, para ver se está correto… Se está correto então avanço para o próximo. Se me pedir várias maneiras, então eu... [procuro-as]” (A3)

> “Estou sempre a pensar nele quando não o consigo resolver. Sempre que resolvo, então não, não, isso assim é o seguinte. (...) Se conseguir resolver, é o seguinte, venha mais.” (A6)

> “Continuo a pensar nele, mas na mesma estou a fazer o outro à frente.” (A4)

Resolver problemas não estimula apenas o desenvolvimento do raciocínio matemático, é como sabemos um meio privilegiado para desenvolver a criatividade (Mann, 2005; Pereira & Saraiva, 2008). Independentemente de insistirem em encontrar várias soluções para o mesmo problema ou passar imediatamente à resolução do seguinte, os alunos entrevistados demonstram energia e persistência perante os problemas que os fazem pensar mais, não desistindo até encontrarem as respetivas soluções, encarando-os como desafios. Tipicamente vão para além da superfície dos problemas (Sheffield, 2009), através de diferentes formas de pensamento, práticas de perseverança, curiosidade e confiança ao enfrentarem situações desconhecidas (NCTM, 2007).

Aptidão na resolução de problemas

Para todos os participantes, embora uns com mais aptidão do que outros, está ao alcance de qualquer aluno resolver problemas (questão 23, ver tabela 57) desde que se empenhem e trabalhem para o efeito:

	23 - Achas que resolver problemas está ao alcance de todos os alunos ou apenas de alguns? Porquê?
A1	Ao alcance de todos, desde que desenvolvam o raciocínio.
A2	Ao alcance de todos. Uns têm mais aptidão do que outros.
A3	Ao alcance de todos. Uns têm mais facilidade do que outros.
A4	Ao alcance de todos. Desde que se empenhem e trabalhem.
A5	Ao alcance de todos. Uns mais do que outros.
A6	Ao alcance de todos. Desde que estudem.

Tabela 57 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 23

> “Está [ao alcance de] todos os alunos, porque eles só têm de desenvolver raciocínio para conseguir chegar mais além nos problemas.” (A1)

> “De todos, desde que … Porque se eles pensarem, se lerem com atenção as coisas, conseguem resolver. Também há pessoas com mais aptidão do que outras.” (A2)

> “(...) Acho que todos têm capacidade para isso [resolver problemas], só que há uns que a sua capacidade é maior e conseguem com maior facilidade e outros que têm mais problemas [dificuldades], mas acho que se esforçarem e isso conseguem… Se estiverem habituados a responder eu acho que qualquer um consegue.” (A3)

> “Toda a gente tem capacidade para resolver problemas. Uns mais e outros menos.” (A5)

> “Todos os alunos, se estudarem, compreenderem a matéria, conseguem todos fazer.” (A6)

O aluno A4, inicialmente, considerou que resolver problemas estava, apenas, ao alcance de alguns alunos. No entanto, posteriormente, consentiu que, de uma forma geral, resolver problemas estaria ao alcance de todos os alunos, desde que se empenhassem e trabalhasse:

> “Alguns. Porque alguns não conseguem assim tão facilmente.” (A4)

De acordo com a opinião dos participantes relativamente ao que tem de especial um aluno que é bom a resolver problemas (questão 24, ver tabela 58), foram recolhidos os seguintes testemunhos:

	24 - Na tua opinião o que tem de especial um aluno que é bom a resolver problemas?
A1	Inteligência, calma e bom desempenho em Matemática.
A2	Inteligência e persistência.
A3	Gosto pela Matemática, desempenho, raciocínio e comunicação.
A4	Rápido, eficaz e facilidade de resolução.
A5	Raciocínio e pensamento lógico.
A6	Aplicado, trabalhador, atento.

Tabela 58 – Síntese das respostas dadas pelos finalistas entrevistados à questão 24

> “O facto de ser muito inteligente para matemática, porque também é uma coisa difícil, tem de se ir aprendendo com calma. E então, é fascinante ver um aluno tão novo já sabendo matemática, isso torna-o diferente, sobressai. (...) Porque logicamente se são bons a responder a problemas, isso também conta muito no desempenho matemática e então, logicamente, são melhores do que os que já não têm assim, já não são tão bons a resolver problemas.” (...) (A1)

> “Sobressai… inteligência. Persistência, a…., pronto, mais ou menos isso.” (A2)

> “A sua capacidade de raciocínio e de lógica. E as potencialidades que eles têm para… outras coisas.” (A5)

> “É um aluno… é um aluno aplicado. Um aluno que trabalha, que está atento nas aulas, faz isso tudo que a professora manda. Só às vezes é que há exceções, assim menos, pessoas que já têm o raciocínio mais desenvolvido, o cérebro muito desenvolvido. (...)” (A6)

A falta de coerência das transcrições relacionadas com a resposta do aluno A4, levou o investigador a resumir o que disse. Neste sentido, o aluno A4, define um bom resolvedor de problemas recorrendo às suas caraterísticas, referindo que deve ser rápido, eficaz e ter facilidade de resolução.

Face à dificuldade de resposta, o entrevistador desmembrou a questão principal em subquestões, a partir das quais o aluno A3 consentiu que um aluno que é bom a resolver problemas se distingue pelo seu desempenho e gosto pela matemática, pelo seu raciocínio e pela sua capacidade de comunicação:

> “(...) Sim, é preciso saber explicar o problema para que também as pessoas que estão a ver conseguirem perceber. Não só a pessoa que está a fazer o exercício.” (A3)

Os entrevistados defendem que resolver problemas está ao alcance de qualquer um, desde que se empenhem, embora assumam que uns alunos têm mais aptidão do que outros. Na realidade, as suas respostas acabam por ser um tanto dúplices, oscilando entre a centralidade de algumas capacidades e caraterísticas individuais (inteligência, raciocínio lógico, atenção) e o impacto de certas atitudes e comportamentos (trabalhar, persistir, fazer o que o professor pede). Para estes alunos um bom resolvedor de problemas combina habilidades (raciocínio, pensamento lógico, comunicação, rapidez, facilidade de resolução...) com caraterísticas psicológicas (inteligência, calma, persistência, empenho, atenção...). Alunos com estes atributos apresentam vantagens no desenvolvimento das suas potencialidades, uma vez que se envolvem na resolução de problemas de forma corajosa sem temer correr riscos e adquirem conhecimento e habilidades mais rapidamente (Perleth & Wilde, 2007). Resolvem problemas de diferentes formas, através de uma ampla gama de estratégias de resolução e de uma variedade de representações (Budak, 2012). São alunos flexíveis na manipulação e organização de dados, aprendem e compreendem ideias matemáticas rapidamente (Bulgar, 2008). Evidenciam um pensamento matemático evoluído, capazes de conjugar conhecimento, imaginação e inspiração (Leikin, 2007). Portanto, os alunos com grande apetência pela resolução de problemas, revelam criatividade, elevada concentração, intuição, originalidade, persistência e flexibilidade; gostam de atividades diferentes e desafiantes, uma vez que lhes permitem criar algo de novo e, ao mesmo tempo, serem autónomos nas suas abordagens; destacam-se ainda pelas suas capacidades mais elevadas de comunicar e explicar simbolicamente as suas resoluções (Applebaum, Freiman & Leikin, 2008).

Síntese

Como se revelam, então, em grandes traços, estes jovens alunos do 2.º ciclo, finalistas do campeonato SUB12, relativamente à resolução de problemas de Matemática, às competições matemáticas e à criatividade matemática?

Estes participantes foram finalistas do campeonato de Matemática SUB12, o que significa, desde logo, evidenciarem boas capacidades domínio da resolução de problemas. Tudo indica, contudo, que se afastam muito da imagem de crianças geniais, com uma aptidão ou um talento matemático de grande exceção.

São crianças para quem a resolução de problemas é motivo de prazer e para as quais esse gosto despontou bastante cedo, frequentemente no 1.º ciclo. Associam a resolução de problemas a raciocínio e a ideias brilhantes, nalguns casos sendo também motivo de exaltação. Veem o gosto pela resolução de problemas como estando diretamente ligado ao gosto pela Matemática e estão convictos de que resolver problemas os ajuda a aprender mais, a desenvolver mais as suas capacidades, a descobrir conhecimento novo e a melhorar o seu desempenho. Revelam persistência, não desistem de tentar e pedem ajuda quando sentem realmente essa necessidade, beneficiando de pistas e dicas. Têm consciência de que há várias maneiras de resolver problemas e essa é uma das razões pela qual dão mais valor ao processo de resolução de problemas do que à obtenção da solução. Conhecem e sabem da importância e utilidade de diferentes modos de representação matemática e atribuem grande importância à explicação do seu raciocínio.

Participam em campeonatos de Matemática por gosto e são também incentivados para essa participação. O fator competitivo tem um certo papel na sua participação em campeonatos, em particular no SUB12. Procuram chegar mais à frente e valorizam a vitória. Preferem os problemas que são mais desafiantes, percebendo que são esses que mais os ajudam a melhorar e que mais os estimulam. O raciocínio é um dos aspetos que mais salientam na resolução de problemas e que mais identificam com a Matemática. Têm a noção de que são capazes de desenvolver estratégias próprias, pessoais e diferentes. Reconhecem o que é uma resolução original, identificando-a como mais avançada, mais distanciada do normal, diferente de todas as outras e reveladora de uma estratégia distinta. Não se preocupam demasiado em ser originais nas suas resoluções, mas admitem que, por vezes, tentam sê-lo, sobretudo na forma de apresentar e comunicar os seus processos. Explicam que, em caso de dificuldade, retomam sucessivamente a leitura e a tentativa de compreensão do problema, pelo que mostram bem a necessidade de compreensão. Mas dão também muita ênfase ao conhecimento matemático para o sucesso na resolução de problemas.

São um pouco dúbios na sua visão acerca da aptidão para resolver problemas, vacilando entre algo que é mais fácil para uns do que para outros e algo que todos podem conseguir desde que com persistência, trabalho e dedicação. Associam a aptidão para resolver problemas a inteligência, raciocínio e persistência. Não a associam diretamente à criatividade ou a algo próximo da criatividade, apesar de realçarem a importância da descoberta, de se referirem à forma como são assaltados por uma grande quantidade de ideias durante a resolução de um problema, de mencionarem as ideias brilhantes e de saberem pôr de lado um problema para o retomar mais tarde, numa linha muito semelhante à do processo de incubação que é típico da criação de conhecimento matemático (Hadamard, 1954).

4.3.2. Entrevistas às professoras

Passaremos em seguida a analisar o conjunto de entrevistas realizadas às cinco professoras dos alunos finalistas selecionados, tendo em vista obter uma perceção tão nítida quanto possível sobre o modo como veem a resolução de problemas, a sua importância na aprendizagem da Matemática e ainda como encaram a criatividade matemática dos seus alunos, em particular no que toca à resolução de problemas desafiadores.

Importância e utilização pedagógica da resolução de problemas

Relativamente à primeira questão (tabela 59), as cinco professoras entrevistadas não atribuem a mesma importância à resolução de problemas, então estabelecida como capacidade transversal no desenvolvimento do currículo de matemática do ensino básico.

As professoras P1, P2 e P4 atribuem, inegavelmente, muita importância à resolução de problemas. De acordo com as palavras das professoras, referindo-se à sua prática pedagógica:

"É … uma prática usual, serve tanto para a introdução de conteúdos como para a aplicação de conteúdos." (P1)

"Dou grande importância na minha prática letiva (...). De qualquer modo, no início [de cada ano letivo], sempre que pego na turma tento que eles percebam o que é a resolução de problemas (...), trabalho com eles vários tipos de problemas, inclusive problemas que lhes ensinam a resolver problemas, e problemas de vários tipos, com várias soluções… problemas tipo puzzle… E depois [trabalho] a parte da resolução, para eles perceberem todas aquelas etapas de compreensão… de estratégia… de executar… e de validar, essencialmente, que é onde eles têm mais dificuldade. (...).Também [é importante] para a aplicação de conteúdos, e não só, mas tento… tento, sempre que possível… depende do conteúdo… pode-se iniciar um conteúdo com a resolução de um problema que se adapta. Por exemplo, sobre operações ou um algoritmo. (...)" (P2)

"(...) através da resolução de problemas, nós conseguimos ver até que ponto os alunos têm capacidade para… para prever um determinado resultado. Para formular conjeturas sobre... sobre o resultado possível que vão obter ou não. Para perceber que um problema pode ter várias estratégias de resolução. (...) Para comunicar o seu próprio processo, a sua ideia. E verificarem, por exemplo, que um problema pode ter várias soluções. Ou pode não ter solução nenhuma. E confrontarem-se com situações que não são rotineiras. (...) Eles [os alunos] muitas vezes pensam que um problema é uma coisa do outro mundo, é sempre uma coisa muito difícil e, às vezes, não é. (...) E é bom para a autoestima, para a autoconfiança deles [dos alunos]. (...) não tenho é muita oportunidade. Gostaria de fazer mais." (P4)

	1- A resolução de problemas é uma das capacidades transversais do Novo Programa de Matemática. Qual a importância desta capacidade transversal na sua prática?
P1	Muito importante para a introdução e aplicação de conteúdos.
P2	Importante para introdução e aplicação de conteúdos. Proposta de problemas para ensinar a resolver problemas e trabalhar a diferentes etapas de execução (compreensão, estratégia, execução e validação).
P3	Alguma importância para lecionar alguns conteúdos.
P4	Muito importante para um certo tipo de atividade matemática em que os alunos preveem resultados; formulam conjeturas; comunicam ideias e processos de resolução; confrontam-se com situações não rotineiras; apropriam-se de diferentes estratégias de resolução; reconhecem diferentes soluções para um problema ou nenhuma. Além disso, são atividades que fomentam a autoestima e a autoconfiança.
P5	Importante, dado que é algo transversal ao currículo de matemática.

Tabela 59 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 1

Já a professora P5 refere-se à resolução de problemas como somente importante, pelo facto de ser uma capacidade transversal preconizada pelo próprio currículo de Matemática, ou seja:

> "(...) o facto, mesmo, de dizer que é transversal. Isso demonstra… ah… que é importante mesmo [para a aprendizagem da matemática]."

Apenas a professora P3 refere dar uma importância moderada à resolução de problemas:

> "Eu dou… dou algum peso… não… digamos, 50/50."

No entanto, explica o que pensa, a seguir, referindo que:

> "(...) além da lecionação da matéria, não o faço sem haver acompanhamento por parte da… de resolução de problemas. Eles são resolvidos dentro da prática letiva, dentro da sala de aula. Depois… há vários problemas que eu incentivo a que eles façam por si e que… onde se englobam alguns jogos, participação em campeonatos, etc.

A forma como a professora respondeu a esta questão acabou por ser um tanto ambígua, não deixando muito clara a real importância que atribui à resolução de problemas na sua prática de sala de aula, parecendo que se trata de algo de caráter complementar ao trabalho de "lecionação da matéria" e que aparenta incluir um certo elemento lúdico. Por isso alguns problemas, de que dá como exemplo os jogos, ficam entregues aos alunos.

Perante a segunda questão (tabela 60), todas as professoras assumem recorrer à resolução de problemas ao longo do ano letivo. E é curioso notar também que declaram usar a resolução de problemas frequentemente nas suas aulas. Quase todas indicam a forma como tendem a usar a resolução de problemas, em ligação com os tópicos curriculares e apresentam exemplos de temas em que o fazem (à exceção de uma das professoras).

	2- Nas aulas de Matemática é frequente aplicar atividades de resolução de problemas ao longo de cada ano letivo? Em que situações?	2.1 - Em todos os conteúdos curriculares? Indique alguns exemplos.
P1	É frequente. Introdução e aplicação de conteúdos (mais ênfase na aplicação).	Em todos os conteúdos. Ex.: Proporcionalidade direta.
P2	É frequente. Explorar e consolidar determinados conteúdos.	Apenas em alguns conteúdos. Ex.: Estabelecer conexões entre vários assuntos. Critérios de divisibilidade.
P3	Sim. Introduzir, aplicar e explorar conteúdos.	Em todos os conteúdos. Pares (poucas vezes) e trabalho individual. Não exemplificou.
P4	É frequente, nas disciplinas de Matemática e de Área de Projeto. Aplicar e introduzir Conteúdos/Conceitos.	Em todos os conteúdos. Ex.: Organização e tratamento de dados (Médias), Geometria (Áreas, perímetros, volumes)...
P5	Habitualmente. Introdução de conteúdos.	Praticamente em todos os conteúdos curriculares. Ex.: Perímetros e áreas, Adição e subtração de números racionais.

Tabela 60 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 2

Segundo a professora P1:

> "(...) É frequente. Tanto na aplicação como na introdução de determinados conteúdos. Embora tenha dado mais ênfase à aplicação dos conteúdos. (...) Em todos [os conteúdos], em todos, a resolução de problemas é muito frequente. (...) na proporcionalidade direta por exemplo."

Tal como no caso anterior, a professora P4 afirma recorrer frequentemente à resolução de problemas para introduzir e aplicar conteúdos/conceitos, mas no seu caso afirma fazê-lo em todos os conteúdos curriculares, tanto na aula de Matemática como na disciplina de Área Projeto. De acordo com a professora, dado que recorre à resolução de problemas em todos os conteúdos, a disciplina de Área de Projeto é uma oportunidade para desenvolver a capacidade de resolução de problemas, uma vez que os alunos dispõem do tempo que não é fácil de conseguir na aula de Matemática, devido à necessidade de cumprimento do currículo. Recorrer à resolução de problemas apenas na disciplina de matemática, significaria colocar em risco o cumprimento do currículo:

> "(...) Eu tenho Área de Projeto com eles [os alunos] (…) é uma das medidas do plano da matemática. Todas as turmas têm Área de Projeto com o professor de matemática, porque um dos objetivos é aprender a resolver problemas (...) porque nós na aula, muitas vezes, vamos

resolver um problema e passam-se os 90 minutos com esse problema. Se nós quisermos explorar bem, demora-se 90 minutos com um problema só. Parece que é perder tempo. Para mim não é, porque com um problema podemos dar muitos conceitos, muitas coisas. (...) E então, o facto de termos Área de Projeto, permite-nos, depois, fazer muitas outras coisas. (...) Ir buscar [problemas] aos mil itens. Ou ir buscar [problemas] ao SUB12 dos anos anteriores. Ou [problemas] das Olimpíadas. E do Canguru Matemático. Fazemos isso. (...) Na organização e tratamento de dados. Às vezes parece um bocado difícil arranjar problemas nessa… nesse tema. Mas já tenho feito sobre médias. Por exemplo, dizendo qual é o valor da média e eles tentarem descobrir que distribuições poderiam haver (...) Ou [problemas] com frequência relativa. (...) na parte dos números e operações, aí há milhares. Na geometria, também tento fazer problemas de áreas, perímetros, volumes.” (P4)

A professora P2 confessa que gostaria de recorrer mais frequentemente à resolução de problemas:

É frequente, mas (...) estes dois últimos anos (...), porque estive com o novo programa [Programa de Matemática de 2007], não foi tanto quanto eu desejaria, mas noutros anos é mais frequente, neste aqui não. É só porque tínhamos muito de novo e o tempo era curto e para resolução de problemas não é à pressa. Tem que ser com tempo, eles têm que pensar, têm que argumentar, têm que tomar decisões. Então, muitas vezes acabava por… por não [recorrer à resolução de problemas].” (P2)

Embora a professora P2 declare recorrer à resolução de problemas, também admite que o faz em função dos assuntos do programa:

“Só em alguns conteúdos, não em todos os conteúdos, mas por exemplo na… nos racionais (...)”

Mencionando apenas a introdução de conteúdos curriculares, a professora P5 diz que recorre à resolução de problemas regularmente com esse intuito, listando exemplos de conteúdos curriculares em que isso sucede:

“Sim, eu costumo, geralmente quando introduzo um conteúdo, uma unidade… Portanto, introduzo sempre com um problema. Praticamente em todos [os conteúdos]. (…) Até mesmo perímetros e áreas. (...) Até adição e subtração de números, números racionais”

Sem indicar qualquer exemplo, nem o momento em que o faz (introdução, aplicação ou exploração), a professora P3 também refere recorrer habitualmente à resolução de problemas:

> "(...) Em todos os conteúdos. Umas vezes em trabalho individual, outras vezes em trabalho de pares. Trabalho de grupo, não faço muito na resolução de problemas."

Relativamente à questão 3 (tabela 61), não se observa unanimidade entre as professoras sobre o papel da resolução de problemas face à formalização de conceitos. As respostas variaram entre encarar a resolução de problemas como um meio para levar à formalização ou colocar os problemas como o culminar de uma formalização prévia.

	3- Considera que a resolução de problemas pode ser um meio para chegar à formalização matemática ou a formalização deverá ser prévia à resolução de problemas?
P1	É um meio para chegar à formalização matemática.
P2	É um meio para chegar à formalização matemática.
P3	Ambos, dependendo da situação e dos conteúdos.
P4	É um meio para chegar à formalização matemática.
P5	Ambos, dependendo da situação e dos conteúdos.

Tabela 61 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 3

A professora P1 pareceu mais inclinada a considerar a resolução de problemas como um meio para formalizar os conceitos matemáticos:

> "Mais ou menos. Do problema para os conceitos? Acho que sim, acho que sim. Acho que sim, porque eles a certa altura, ao resolver, está-lhes a faltar ali qualquer coisa e… depois, entretanto, por aquilo que eles questionam e por aquilo que sinto que eles estão a precisar, vai-se introduzindo [os conteúdos]. (...) É a tal história, uns… para uns, olha, os números vão de 2 em 2. Outros dizem: é a tabuada do 2, são os múltiplos de 2. Ou a forma algébrica, 2n."

Para a professora P2, parece ter mais sentido partir da resolução de problemas e avançar para a abordagem de conteúdos, levando a estabelecer conexões:

> "(...) Acho que da resolução de problemas podes [partir para a formalização] (…) Sim, o contrário não concordo. (...) E a partir daí, pegar e abordar até… Por exemplo, resolvem um problema e através dessa resolução deles eu até posso fazer conexões com outras áreas e abordar outros conteúdos. E não dar um conteúdo por cada resolução de problemas, isso é muito limitado, muito limitador, muito melhor de outra maneira. Daí posso… Sim, dar imensas coisas em simultâneo até eles perceberem."

Também a professora P4 considera que a resolução de problemas é um meio para a formalização matemática:

> “Eu acho que é primeiro a resolução de problemas. Sempre acreditei nisso desde… desde o primeiro dia. Continuo a trabalhar sempre nessa perspetiva. “

As professoras P3 e P5 consideram que as duas situações podem ser adequadas, dependendo da situação, do conteúdo e dos alunos.

> “Eu acho que as duas coisas se interligam. Há situações em que… acho que o problema, em si, e o dissecar do problema e tentar resolver o problema leva depois à formalização… à formalização. Há outras vezes… pois, isso depois também depende do tempo, depende dos alunos que tenho à frente. (...). Depende do conteúdo. Há turmas em que eu posso estar ali 90 minutos a tentar e não sai [a resolução]. (...)” (P3)

> “Acho que as duas coisas… depende da situação (…) pode-se fazer de uma maneira ou de outra, depende da... da situação ou do conteúdo (...).” (P5)

A resolução de problemas para além de constituir um objetivo da aprendizagem matemática, também é um poderoso meio através do qual os alunos aprendem matemática e desenvolvem habilidades cognitivas gerais (Pehkonen, 1997). Trata-se de uma competência essencial e transversal a toda aprendizagem matemática, dado que estimula um conjunto de habilidades de grande importância, nomeadamente, a aquisição de diferentes formas de pensar, de práticas de perseverança, de curiosidade e de confiança perante situações desconhecidas (NCTM, 2007). Portanto, é uma componente essencial das habilidades necessárias para executar tarefas analíticas interpessoais e não rotineiras com sucesso (OEDC, 2014). Além de tudo o mais, entre as diversas áreas e processos da matemática que contribuem para a promoção da criatividade, a resolução de problemas é considerada por muitos professores como a metodologia mais indicada para o efeito (Kattou, Kontoyianni & Christou, 2008). No caso das cinco professoras dos jovens finalistas e de acordo com as questões 1, 2 e 3 (respetivamente, tabelas 19, 20 e 21) colocadas às professoras entrevistadas, as mesmas assumem recorrer à resolução de problemas durante as suas práticas em praticamente todos os conteúdos, revelando consciência da sua importância como capacidade transversal no currículo de Matemática. Dependendo da situação, podem recorrer à resolução de problemas para chegar posteriormente a fases de formalização matemática, dado que esta atividade lhes possibilita introduzir e explorar conteúdos. Mas também consideram razoável uma formalização prévia à resolução de problemas, que se perspetiva então como ferramenta para aplicar e consolidar conteúdos. Como sabemos de resultados de estudos realizados, as práticas dos professores relacionadas com atividade de resolução de problemas estão positivamente associadas à motivação, ao desempenho e à realização dos alunos na disciplina de Matemática (Pantziara & Philippou, 2007). Neste sentido, pode-se concluir que estas professoras proporcionam aos seus alunos oportunidades para se envolverem na resolução de problemas, possibilitando-lhes experimentar e praticar uma forma de trabalho em matemática que sabemos fomentar a criatividade, especialmente se os alunos forem incentivados a avançar e refletir sobre as suas próprias ideias (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012). Um pormenor a salientar das entrevistas é o de que apenas uma das professoras parece valorizar a resolução de problemas pela resolução de problemas, isto é, como forma de aprendizagem de estratégias e das próprias etapas da resolução de um problema. Na grande maioria, para estas professoras a resolução de problemas surge fortemente ligada ao conhecimento dos conteúdos e processos presentes no currículo.

Face à questão 4 (tabela 62), sobre o que pensam quando os seus alunos se debatem com dificuldades num problema, todas as professoras mostram que costumam ajudar os seus alunos de modos diferentes, mas em muitos casos essa ajuda incide sobre a interpretação e compreensão do problema.

A professora P1, costuma ajudar os alunos ao nível da interpretação sem lhes dar a resposta. De acordo com a professora:

> "Costumo, costumo, mais no sentido… mas não dizer-lhes. Primeiro, há que haver uma compreensão do enunciado, de modo a que eles percebam o que… Quais são os dados? O que se pretende? O que é que é importante aqui? Como é que podemos resolver? Vamos fazer um esquema? Podemos utilizar alguma matéria? O que é que está aqui em jogo? O que é… Ou então o que é que podemos fazer? Mas principalmente eles compreenderem, eles … apropriarem-se do problema. (...)"

	4- Sempre que surge um problema que os seus alunos não conseguem resolver qual é a sua preocupação? Costuma ajudá-los?	4.1 - De que forma?
P1	Ajuda, sem dizer a resposta.	Na interpretação, compreensão e comunicação; na identificação dos dados; identificação do objetivo; sugestão de estratégias; exploração do conhecimento adquirido.
P2	Por norma os alunos conseguem, dado que são muito cooperativos.	Na interpretação, através de pistas.
P3	Tenta perceber as dificuldades dos alunos.	Na interpretação e compreensão. Resolve e explica quando os alunos não conseguem.
P4	Costuma ajudar.	Na interpretação, através de pistas com base nos dados.
P5	Sim, ajuda.	Ajuda sem dar a resposta, através de dicas, esquemas, desenhos. Se os alunos não conseguirem a professora resolve.

Tabela 62 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 4

Os alunos da professora P2, raramente recorrem à sua ajuda:

> "Eu acho que eles quase sempre conseguem… Há aquela parte, alguns não estão a ver… Mas eles trabalham muito em equipa cooperativa, trabalho cooperativo. Por isso, eles acabam sempre por conseguir resolver porque um dá uma ajudinha aqui, outro dá uma ajudinha ali e acabam sempre por depois conseguir resolver."

Mas adianta que procura ajudá-los ao nível da interpretação, através do estímulo de diferentes formas de ver o problema e de lançar pistas:

> "Tento que eles [os alunos] percebam o que não percebem: Então, vê lá bem o que é que se pretende. Lê outra vez. O que é que tu achas? Porque será que tu não percebes? Se calhar tens de ver de outra maneira… tenta lá… Às vezes tento dar [ajuda] o menos possível, [mas] às vezes tenho que dar, quando há assim algum desesperado. Tenho que dar uma pistazita para… Mas tento não dar. E raramente isso acontece porque eles acabam por se ajudar uns aos outros. Acaba por ser entre eles. Eles são os professores uns dos outros, inclusive até tenho alunos… tenho um aluno que diz sempre que o Toninho [A3], por exemplo (...) diz que ele explica melhor do que eu."

Já a professora P3 usa como estratégia ir dissecando o problema com os alunos:

> “Tentar perceber onde é que eles estão emperrados no problema. Primeiro tento analisar com eles onde é que está o cerne, onde é que está o problema. Quer dizer, o problema do problema. Porque é que eles não estão a entender o problema. E depois faço uma leitura, faço duas leituras, faço paragens, disseco o problema ainda em frases. E geralmente com esta ajuda (...) alguns começam a perceber e começam a resolvê-lo. Outras [vezes]… quando essa estratégia não funciona… portanto, eles estão mesmo emperrados com o português… sou eu que inicio o problema, resolvo no quadro, explicando o que é que se passa… o que é cada coisa… para depois resolver.”

A professora P4 assume que ajuda os seus alunos, referindo que lhes dá pistas e outras informações, mas fala também na ajuda com a compreensão:

> “Sim, dou-lhes pistas. Dou-lhes alguns dados. Ajudo-os a perceber melhor o enunciado. Tento encontrar a dificuldade.”

Perante dificuldades, a professora P5 ajuda os seus alunos com dicas e só em último caso acede a resolver se eles não conseguem:

> “Costumo dar assim umas dicazinhas. Vou dando dicas… ou se for preciso faço um esquema, ou um desenho. Tentar esquematizar o que é que se pede. Pronto, tento assim…, não dou imediatamente a resposta, isso não, não. Tento que (...) que façam a descoberta. Se não conseguem mesmo, mesmo, aí é que… pois, que remédio, mas raramente… Geralmente há sempre um ou outro que consegue.

Perante as entrevistas feitas às professoras, é notório que costumam ajudar os seus alunos no caso de eles manifestarem dificuldades durante a resolução de problemas, mas nota-se igualmente que procuram não lhes dar ou mostrar as respostas, incidindo a sua ação sobre a leitura, interpretação, compreensão, identificação de dados, sugestão de pistas, exploração de conhecimento prévio, proposta de abordagens como realização de esquemas, desenhos, etc... Constata-se assim que são professoras que fornecem aos seus alunos problemas cujas soluções não são imediatas, nos quais estes devem usar mais do que apenas as rotinas e processos algorítmicos. Esta forma de agir dos professores alicerçada em apoio e orientação, constitui uma oportunidade para os alunos integrarem o seu conhecimento e atingirem uma visão coerente ou uma compreensão clara dos problemas propostos que lhes permita empregar vários processos que à primeira vista pareceriam ser independentes (Mann, 2006; Shriki, 2009). O testemunho prestado pelas professoras é consonante com o dos seus alunos entrevistados no âmbito deste estudo, relativamente à questão 13 (tabela 10), confirmando-se que o tipo de ajuda prestado pelas professoras dos jovens finalistas na resolução de problemas não é limitador e condicionador, mas pelo contrário, fomenta a liberdade e autonomia na busca de soluções, através de dicas e pistas e suporte na interpretação e compreensão dos problemas propostos.

Para todas as professoras entrevistadas, são mais gratificantes os raciocínios elaborados pelos alunos do que, propriamente, as respostas (questão 5, tabela 63), pelas seguintes razões que indicam.

	5- Para si é mais gratificante que os alunos cheguem às respostas ou os raciocínios por eles elaborados? Porquê?
P1	Os raciocínios. Porque a resposta pode estar errada e é possível identificar os erros para melhorá-la.
P2	Os raciocínios. Porque obriga os alunos a pensar.
P3	Raciocínio. Permite perceber todo o processo utilizado e verificar quais os pontos fracos e fortes.
P4	Raciocínio. Possibilita observar o processo usado e detetar os erros no caso da resolução estar errada.
P5	Raciocínio. Permite confirmar o domínio do conhecimento, perceber o raciocínio utilizado e corrigir em caso de haver erros.

Tabela 63 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 5

> “ (...) Porque… porque a resposta pode estar errada e… é o que eu lhes digo: vocês indiquem-me sempre como é que pensaram, como é que fizeram. Porque é assim... uma resposta pode estar errada e se eu não vir lá o processo de resolução é zero, não conto nada. Se entretanto vocês forem… justificarem e expuserem o vosso raciocínio, eu vejo o que é que falha. Às vezes pode ser uma continha sem importância mas que faça a diferença. (...) claro que o ideal é… são as duas coisas, mas… mas o raciocínio em primeiro lugar.” (P1)

> “(...) Eu dou muita importância ao raciocínio deles, ao processo. Eles até sabem quando lhes dou as cotações dos testes que às vezes a resposta, por exemplo, vale dois pontos e o raciocínio vale quatro, se põem só a resposta só têm dois pontinhos e é uma pena, portanto, por isso é que eles são sempre incentivados àquela parte do raciocínio. Ambas são importantes, mas valorizo muito o raciocínio deles porque assim tiveram… Eles pensaram. Eles pensaram, está bem feito…” (P2)

> “O raciocínio é mais importante. Mas a resposta é conveniente que esteja certa. (...) Se um miúdo me dá, num problema, só o resultado final, não me explicita como lá chegou, não lhe dou valor. Eu não sei o caminho… Eu não sei como ele lá chegou. Portanto: eu prefiro que vocês me escrevam tudo, desenho, gráfico, o que quiserem, mas que me expliquem o caminho que seguiram para chegar ao resultado: E… vamos supor que o caminho está todo certo e vocês no final, erraram ou trocaram um número (...), fizeram uma adição em vez de uma subtração (...). Eu tenho todo o caminho para trás para ver o que vocês fizeram, como é que vocês raciocinaram e isso para mim é mais valorizado. Do que só o final… só o resultado. Portanto, é mais o raciocínio.” (P3)

> "O raciocínio. Porque o ter um raciocínio bem elaborado, correto e depois enganar-se num pequenino cálculo, portanto, ter um pequenino erro de percurso não é nada grave. Porque o aluno está a pensar bem. Numa outra situação, se calhar faria bem. Enquanto que chegar à resposta sem… sem seguir o raciocínio correto (...) se calhar copiou." (P4)

> "Acho que é o raciocínio. E até lhes digo: podem pôr a resposta certa, mas se não puserem como chegaram [ao resultado], não dou cotação. (...) no raciocínio, aí é que vejo se realmente sabem ou não sabem. (...) aí é que eu vou ver quem sabe e quem não sabe." (P5)

Tendencialmente, as professoras entrevistadas valorizam os raciocínios dos seus alunos, uma vez que são reveladores do seu domínio do conhecimento, dos processos que utilizam, dos erros e das falhas que cometem e da adequação ou desadequação das estratégias. Infere-se que os erros são explorados, como uma medida ativa para o caminho de uma solução, uma vez que resultam do uso de estratégias desadequadas ou mal aplicadas e, como tal, a sua exploração e reconstrução ajuda os alunos a perceberem e a colmatarem as suas falhas, bem como a adequar as estratégias (Urban, 2007). Portanto, enquanto mediadoras do conhecimento matemático, é possível constatar que estas professoras gostam de recorrer a problemas que permitem aceder a conteúdos matemáticos e, simultaneamente, valorizar o raciocínio e o desenvolvimento de processos matemáticos tais como analisar, conjeturar, investigar, comunicar e criar, contribuindo assim para uma aprendizagem mais efetiva da Matemática (Vale & Pimentel, 2011). São professoras que envolvem os seus alunos na exploração criativa, sem os limitar apenas às aplicações baseadas em regras que os impedem de reconhecer a essência do problema a ser resolvido (Mann, 2006) e incentivam-nos a assumir riscos intelectuais ao partilharem a sua interpretação matemática das situações (Sriraman, 2009; Shriki, 2009). Estas professoras concebem assim as resoluções dos seus alunos como processos criativos, levando a que a criatividade matemática surja incorporada e intimamente relacionada com a atividade de resolução de problemas (Yee, 2008a).

Originalidade na resolução de problemas

De uma forma geral, quando responderam à questão 6 e respetivas subquestões (tabela 64), todas as professoras afirmaram encontrar diferentes resoluções para um mesmo problema, produzidas pelos seus alunos, durante a atividade de resolução de problemas.

	6- Durante a atividade de resolução de problemas com os seus alunos costuma encontrar diferentes tipos de resoluções para um mesmo problema? Criativas? Originais?
P1	Sim (expõe-nas para todos).
P2	Sim. Algumas revelam estratégias inesperadas.
P3	Sim. Algumas são criativas e originais.
P4	Sim. Muitas.
P5	Sim. Algumas são originais e criativas.

Tabela 64 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 6

De acordo com o seu testemunho, a Professora P1 está sempre atenta à atividade dos seus alunos com a intenção de encontrar resoluções incomuns para as poder exibir perante todos e exemplifica com um caso concreto:

> "(...) para mim é muito fabuloso, porque estou sempre à cata e depois gosto de expor perante a turma … olha, este fez assim. E quem é que fez de maneira diferente? (...) para eles compreenderem que [a resolução de problemas] não tem que ser diretamente na aplicação dos conteúdos."

> "Este ano por exemplo, na turma (...) havia lá um miúdo que era muito criativo. Ele conseguia fazer [resoluções] sempre diferente dos outros e de uma maneira que nem eu, até, pensava (...) e umas com muita ênfase no cálculo mental. Ele fazia tudo mentalmente. Mesmo até para determinar percentagens, ele ia sempre desmembrando, desmembrando, desmembrando até chegar ao valor. "

Quando acontece detetar resoluções criativas e originais, entre os seus alunos, a professor divulga-as, tornando-as públicas e valorizando-as.

As professoras P2 e P3 confirmam encontrar resoluções criativas e originais, entre os seus alunos, com as quais dizem ficar surpreendidas:

> "Sim, sim, isso é o mais interessante. Sim, sim, muito originais e surpreendentes, eu fico muito surpreendida porque muitas vezes são estratégias inesperadas (...)" (P2)

> "Sim, sim, sim. Algumas são [criativas e originais]. Algumas são." (P3)

O depoimento da professora P4 revela também que muitas das resoluções elaboradas pelos seus alunos são criativas e originais. Normalmente, durante a atividade de resolução de problemas, os seus alunos trabalham em grupos e a professora explica o que faz para apoiar a comunicação das suas resoluções:

> "O que eu faço, às vezes, dou-lhes (...) dou-lhes um acetato… E eles escrevem no acetato a sua… o seu processo e a sua resposta. Depois mostram-me. Porque assim estão todos ao mesmo tempo a trabalhar e

depois é só pôr no retroprojetor e mostram à turma e discutimos. Normalmente eu escolho os grupos que estão a ir por caminhos diferentes. Aqueles que estão a ir pelo mesmo caminho, seleciono um deles… para ter ali duas ou três estratégias diferentes. Para compararem. (...)"

De acordo com o testemunho da professora P5, os seus alunos revelam igualmente estratégias e formas de abordar os problemas que para ela são inesperadas:

"Sim, sim. Exatamente. Algumas [resoluções] são criativas, são engraçadas, sim. Sim [e originais]. E noto que às vezes vão buscar uma forma de resolver que eu nem… nunca pensei, nem… portanto, ou com esquema ou com desenhos, usam assim… umas técnicas … que a pessoa nunca, nunca pensa."

Perante a questão sete (tabela 65), quando questionadas sobre o que entendiam acerca de uma resolução original e criativa, as professoras revelaram a sua compreensão do significado. Relativamente à relação entre os conceitos de originalidade e criatividade, todas as professoras pareceram sentir dificuldade em responder, por falta de conhecimento e, consequentemente, evidenciaram pouca convicção acerca das suas respostas.

	7- O que é para si uma resolução original?	**7.1- E criativa?**	**7.2 - Considera a originalidade e a criatividade iguais, parecidas ou diferentes?**
P1	Original e criativa: Foge ao antecipado. Diferente do habitual.		Diferentes mas semelhantes.
P2	Original: Vai além do que é esperado. São próprias dos alunos. Diferentes.	Criativas: Estratégias inovadoras e diferentes.	São diferentes.
P3	Resolução correta e diferente, independentemente da estratégia utilizada.		Talvez parecidas.
P4	Original: Usar esquemas, desenhos..., mas com sentido..	Criativa: Original, nunca vista.	Difíceis de distinguir. Talvez se confundam (Original: própria do aluno; Criativa: não convencional).
P5	Fora do normal.		São idênticas. Parecidas ou praticamente iguais. Não se podem separar.

Tabela 65 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 7

Segundo a professora P1, uma resolução original e criativa:

"É aquela que foge ao que eu tinha pensado. É diferente do habitual. É... nem eu própria tinha pensado resolver assim".

Para esta professora, parece existir uma certa diferença entre originalidade e criatividade, embora não elabore a sua resposta:

> "Originalidade e criatividade… Acho que até são diferentes, mas têm semelhanças."

A explicação dada pela professora P2, revela as suas visões sobre estes conceitos:

> "Uma resolução original e criativa? É a que vai mais além, é uma resolução que vai mais além do que aquilo que é esperado, por isso é que é original. Porque não é como todos fazem. (...) são originais porque são do próprio… do aluno. E todas [as resoluções] sempre têm algo de diferente. Mas criativo é, às vezes, quando eles [os alunos] arranjam estratégias inovadoras e diferentes, próprias do aluno e que são muito originais, que é difícil encontrar outro aluno com aquela estratégia."

No que diz respeito à relação entre criatividade e originalidade, a professora considera que os conceitos são diferentes, parecendo associar a originalidade a um certo cunho estético da resolução:

> "Não, acho que é diferente. Original é mais genuíno e criativo, acho que tem mais artefactos, mais embelezamento. Penso eu, penso eu. Mais embelezamento… mas é muito importante ter criatividade."

A originalidade e a criatividade de uma resolução, do ponto de vista da professora P3, referem-se à utilização de uma abordagem mais fora do "normal", onde está clara a importância da validade e da correção matemática da resposta:

> "É uma forma de olhar para o problema de forma que os outros… que a maioria não resolve. (...) que chegue à conclusão certa mas não pelo caminho que a maioria… usa. Inclusive, às vezes eu própria. Se calhar eu vou por uma via mais direta, mais normalizada e eles chegam à conclusão de uma forma… que não é direta, mas que demonstra que há raciocínio e que aquilo está certo. Que é válido."

A professora P3, refere-se à originalidade e criatividade como parecidas, embora distintas:

> "Não sei… parecidas… talvez. Sim, porque às vezes a criatividade é diferente de ser original."

A professora P4, caraterizou a originalidade e a criatividade de uma resolução de forma um tanto confusa, o que levou o investigador a incentivar a sua reflexão. Tentou exemplificar, mas não conseguiu ser clara:

> "Uma resolução original é… é uma resolução em que o aluno vai, por exemplo, utilizar um esquema, um desenho, um (...). Por exemplo, nós

> às vezes estamos a dar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum e... e apresentamos um problema, um problema qualquer. Um autocarro sai… passa naquela paragem de 12 em 12 minutos e o outro de 16 em 16. Quando é que se voltam a encontrar? Queremos que ele vá calcular o mínimo múltiplo comum. E que vá… que decomponha em fatores primos (…). Mas se um aluno fizer, por exemplo, vai escrevendo 12, 12, 12, 12 e o outro 16, 16, 16 até descobrir o primeiro número… considero. É que, para ele, faz sentido.
>
> **Entrevistador:** … uma resolução própria, do aluno? Do próprio aluno?
>
> **Professora P4:** Própria, dele. Que eu sei que ele não foi copiar nem… nem automatizou. Foi criada por ele.
>
> **Entrevistador:** E criativa?
>
> **Professora P4:** Criativa sim… original, nunca vista.
>
> **Entrevistador:** Nova?
>
> **Professora P4:** Nova.

Quanto à relação entre a originalidade e criatividade, assumiu que são conceitos difíceis de distinguir, parecendo relacionar ambos com a ideia de não convencional e incomum:

> "Eu tenho um bocado de dificuldade em distinguir as… as duas coisas. (...) Criativa porque é… é não convencional, talvez. Original, original porque foi criada por ele, nunca foi vista, não… pela primeira vez me deparei com ela. Talvez se confundam um bocadinho. São conceitos difíceis de distinguir."

Tal como a anterior, também a professora P5 mostrou muita dificuldade para caraterizar uma resolução original e criativa. Para esta professora, uma resolução original e criativa é um produto:

> "Se calhar fora do… do normal, digamos assim, do que estamos à espera. Dos… parâmetros (...). Portanto, sai desse parâmetro que… a que estou habituada."

Quando lhe foi pedido para relacionar a criatividade e originalidade, a professora considerou-as difíceis de distinguir e também de separar uma da outra:

> "(...) disse original e agora criativa? Parece-me assim muito idêntico. (...) Acho que são parecidas ou praticamente iguais, se calhar. (...) Estava a pensar, há dois anos tive um miúdo ucraniano e (...) o miúdo realmente tinha umas maneiras de resolver totalmente… próprias, e via que eram mesmo… se calhar originais, mas ao mesmo tempo criativas. Portanto, acho que uma coisa… tem a ver com a outra. (...) acho que não se pode… assim… separar."

Face à questão 6 (ver tabela 64), embora todos as professoras revelem encontrar resoluções diferentes para o mesmo problema, por vezes, criativas e originais, e manifestem um certo conhecimento acerca dos conceitos em questão, tal como os seus alunos (questão 17, tabela 12), denotam algumas hesitações acerca dos mesmos, nomeadamente, no que diz respeito à convicção acerca da relação e distinção entre os conceitos de criatividade e originalidade, por vezes, confundindo-os (questão 7, tabela 65). Desta forma, pode-se constatar que a ideia de criatividade que prevalece nas professoras entrevistadas reduz-se à dimensão da originalidade, estando suportada pela conceção de criatividade que se restringe essencialmente ao que é novo, incomum, diferente da norma, invulgar, marcado pela forma de pensar própria e particular de cada indivíduo. Embora pareça existir uma certa tendência para considerar a criatividade como não completamente sinónimo de originalidade, a verdade é que são exíguas quaisquer referências que apontem para a vertente da fluência de conhecimento ou para a flexibilidade representacional. Na verdade, apenas a professora P3 aponta uma ideia que é próxima da ideia de fluência, ao falar da importância de uma abordagem que conduz à solução correta. Além desta referência, apenas a ideia de utilização de procedimentos próprios, isto é, criados pelo próprio aluno para chegar à solução, se ajusta ao conceito de fluência de conhecimento. Portanto, no geral, as perceções das professoras acerca da criatividade e da sua relação com o conhecimento matemático mostram-se relativamente imprecisas; o mesmo pode ser dito acerca da ligação entre a criatividade matemática e o recurso a formas de representação adequadas. Como referem vários autores, este facto tem consequências sobre o reconhecimento e o desenvolvimento do potencial criativo dos alunos (Mann, 2005). Não obstante, ao considerarmos as respostas dos jovens finalistas, alunos destas professoras, percebemos que estes atribuem clara relevância ao conhecimento matemático, à capacidade de representar matematicamente, às ideias luminosas, à persistência, e à utilidade das abordagens para alcançar a solução.

É de supor, assim, que não sejam ainda suficientes o conhecimento, a experiência e as ferramentas didáticas para os professores se envolverem pessoalmente no ensino e produção de soluções criativas (Vale & Pimentel, 2013). Trata-se de um processo que envolve a mudança dos hábitos de muitos professores, como por exemplo, o hábito de atribuir mais importância à precisão do que à originalidade (Hershkovitz, Peled & Litter, 2009). Nota-se, portanto, a necessidade de conhecer e procurar modificar as crenças dos professores sobre a criatividade matemática, trazendo para a sua formação e desenvolvimento profissional uma visão interrelacionada de aprendizagem e criatividade (Beghetto & Plucker, 2006).

Perante a oitava questão (tabela 66), todos os professores preferem usar as resoluções dos alunos durante a etapa de correção e discussão dos problemas. Só quando os alunos não conseguem resolver um problema é que as professoras orientam a resolução ou apresentam a sua própria forma de resolver.

	8- Durante a correção dos problemas costuma utilizar as resoluções dos alunos ou é a professora que apresenta uma resolução?
P1	Recorre às resoluções dos alunos, expondo-as para todos. Só resolve se os alunos não conseguirem ou só apresenta a sua resolução se for diferente das dos alunos.
P2	Recorre às resoluções dos alunos e à sua explicação. Só quando os alunos não conseguem é que a professora assume um papel moderador, ajudando ou apresentado a sua resolução.
P3	Recorre às resoluções dos alunos e pede-lhes para explicarem a estratégia usada.
P4	Recorre às resoluções dos alunos. Só recorre à sua resolução se os alunos não chegarem ao que se pretende.
P5	Recorre às resoluções dos alunos, que as registam no quadro para serem discutidas por todos, com o intuito de mostrar que pode haver vários caminhos para a mesma solução.

Tabela 66 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 8

A professora P1 recorre à variedade de resoluções que os seus alunos apresentam para que os mesmos reconheçam que existem variadas formas de resolver um mesmo problema. A professora traz apenas a sua forma de resolver quando isso se justifica:

"Só se às vezes não surgem algumas [resoluções por parte dos alunos]."

Quando os alunos apresentam resoluções, a professora só apresenta a sua se for diferente:

> "Se achar que sim também, pois também vai. Ou se me interessa por algum motivo expor a minha para conduzir a outra… a outra situação. Às vezes interessa-me também"

Segundo a professora P2:

> "Eles vão explicar como resolveram, os vários grupos, eles explicam. Depois há um confronto. (...) Mas eles comunicam, eles argumentam e depois eu… às vezes… pode acontecer… depende das situações (...) às vezes, se calhar, se eu quero atingir um objetivo que posso não ter conseguido [concretizar], eu depois apresento [a minha resolução]. (...) Mas são sempre eles e eu é que… eles é que são as estrelas, eu mais a moderadora."

De acordo com a professora P3, os alunos apresentam sempre as suas resoluções:

> "São eles [os alunos] sempre. No quadro. E depois discutem em turma. O que é que fizeram. Porque é que está mal ou está bem. Mas eu não resolvo."

Também a professora P4, recorre às resoluções dos alunos:

> (...) dos alunos. Acrescento depois qualquer coisa. Imaginemos que eu queria chegar a um determinado ponto. Se ninguém chegou, se ninguém apresentou, claro que a professora acrescenta."

No caso de haver diferentes resoluções, a professora P5 procura compará-las e mostrar que há vários caminhos diferentes:

> "(...) peço para irem ao quadro (...) resolver e depois, se há outras diferentes... vai as várias… hipóteses… Para verem… compararem o que é que um fez… e verem que há várias formas de se chegar ao mesmo resultado. Que não há um só caminho."

Todas as professoras, na resposta à questão 9 (tabela 67), referem ser surpreendidas pelas estratégias utilizadas pelos seus alunos durante a atividade de resolução de problemas e a sua tendência natural é valorizá-las, pedindo-lhes para as explicarem.

	9- Costuma ficar surpreendido com as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução de problemas? Quando isso acontece qual é a sua reação?
P1	Sim. Fica contente e mostra aos outros alunos.
P2	Sim. Fica muito contente e dá-lhes reforço positivo.
P3	Sim. Pede aos alunos para irem ao quadro explicar, para que os outros percebam outras formas de chegar às soluções.
P4	Às vezes. Reação de satisfação e pede aos alunos para divulgarem e explicarem à turma.
P5	Às vezes. Incentiva os alunos a mostrarem a sua resolução aos outros.

Tabela 67 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 9

> "Sim, sim, sim, sim. Já tenho tido algumas que eu gosto. Fico… pronto, acho que me enche. Olha, fico, fico contente e… pronto, anuncio. Já viram esta? Venham ver… vejam só esta… olha…e…e…" (P1)

> "Sim, sempre surpreendida. Às vezes fico muito contente com eles e dou-lhes assim muito reforço positivo… Que bom! Conseguiste! Vê lá, eu não conseguia ver isto desta maneira… Eu fico sempre muito contente porque acho sempre que eles são muito mais inteligentes do que eu. (...)" (P2)

> “Peço geralmente que eles venham ao quadro explicar. A forma… porque é uma forma diferente dos outros. Para que os outros notem que há formas diferentes para chegar ao mesmo sítio. Portanto, geralmente quando há uma coisa que é mesmo diferente eu… eu peço a esse aluno para vir ao quadro explicitar… sim… aos outros.” (P3)

> “A minha reação é de satisfação. É de… fico contente, pois… depois peço ao aluno para mostrar e divulgar à turma ou aos alunos.” (P4)

> “(...) tento… como é que se diz… ai… não é dar os parabéns… como é que se diz… incentivar e… demonstrar perante os outros que… que fez bem, (…). E depois aproveito, aproveito [exemplifica como se dirige à turma]: olha veem, há esta maneira também, nem tinha pensado. A maior parte das vezes a pessoa nem estava à espera… não é… nem pensava... e aproveitar para mostrar aos outros”. (P5)

Por norma as professoras preferem utilizar as resoluções dos seus alunos durante a correção dos problemas, afirmando recorrer às suas apenas quando os alunos não são capazes de o fazer por si (Tabela 66). Durante a atividade de resolução de problemas, por vezes, as professoras confessam ficar surpreendidas com as estratégias utlizadas pelos seus alunos (Tabela 67), sendo a sua tendência natural valorizá-las e expô-las, pedindo aos autores para as comunicarem e explicarem à turma. A versão das professoras coincide com a dos respetivos alunos entrevistados para este estudo (questão 17, tabela 51), evidenciando caraterísticas tendencialmente criativas, uma vez que valorizam e toleram pensamentos incomuns, ideias originais e produtos novos, mostrando a importância dos esforços individuais para encontrar uma solução e não apenas o produto final (Urban, 2007). São professoras que manifestam um estilo integrador de ensino; incentivam a aprendizagem independente com base no domínio do conhecimento e no pensamento divergente; valorizam as sugestões e questões emergentes; ajudam a lidar com o fracasso e a frustração; encorajam a experimentar o novo e o incomum; esforçam-se para promover nos alunos a habilidade para ver e estabelecer conexões e associações, bem como as suas sobreposições, semelhanças e implicações lógicas; fomentam a capacidade de pensar em problemas de múltiplas maneiras; espicaçam a capacidade e vontade de avaliar o próprio trabalho; estimulam a capacidade para comunicar os resultados (Cropley, 1997, referido por Beswick, 2008).

Face à questão 10 (tabela 68) sobre a maior ou menor afinidade entre a matemática escolar e a criatividade, as professoras manifestam alguma diversidade nas suas respostas. Para algumas, a matemática escolar e o currículo dão margem aos professores para incentivar a criatividade; para outras, a matemática escolar parece estar mais dirigida aos alunos disciplinados e rigorosos.

	10- Considera que a matemática escolar incentiva os alunos a serem criativos e originais ou dá mais valor aos alunos rigorosos e disciplinados? Porquê?
P1	Incentiva todos os alunos, dado que promove a descoberta, colocando ênfase no raciocínio e no conhecimento prévio.
P2	Depende de quem aplica os programas. Teoricamente, incentiva mais a criatividade e a originalidade, devido à possibilidade da descoberta de conteúdos, não descurando o rigor.
P3	Incentiva mais os alunos disciplinados e rigorosos, uma vez que a matemática funciona para os alunos que gostam desafios.
P4	Incentiva todos os alunos, dado que é importante descobrir primeiro os conteúdos, para depois serem formalizados.
P5	Incentiva ambos, uma vez que a matemática não está reservada apenas a um certo tipo de alunos.

Tabela 68 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 10

A professora P1, apoiando-se no currículo de Matemática em vigor à data das entrevistas, considera que a matemática escolar incentiva todos os alunos a serem criativos e originais, dado que promove a descoberta de conceitos por parte dos alunos, com destaque para o raciocínio e o conhecimento matemático prévio:

> "Eu acho que com o novo programa [Programa de 2007]… agora pretende-se que haja maior criatividade (...). Porque a ênfase está no processo, na forma de resolver (...), no raciocínio. Mais valorização… maior valorização do raciocínio, na procura de regularidades, na formulação de conjeturas, procura de padrões. Portanto, mais o raciocínio matemático"

A professora P2 considera que a valorização da criatividade dos alunos na Matemática escolar não depende do programa, mas de quem o aplica:

> "(...) O problema não é o programa, em Matemática … O problema é muitas vezes depois a rotina que as pessoas [os professores] seguem, que dá por seguir um manual escolar, que dá por seguir aquela bíblia e acabam por ficar por ali. É essa a pena que eu tenho, muitas vezes, porque vão pelo facilitismo. É mais fácil seguir o manual e pronto. E há manuais que são terríveis, terríveis"

No entanto, a professora considera que o programa atual de matemática incentiva mais a criatividade e a originalidade porque são os próprios alunos que partem para descoberta dos conteúdos, embora não descurando o rigor.

De acordo com a professora P3, a matemática escolar dá mais valor aos alunos rigorosos e disciplinados:

> "Eu acho que a tendência é mais para os disciplinados e rigorosos. (...) Porque eu acho que a matemática funciona… para alunos que gostem de desafios. A parte estimulativa em termos de problemas, criatividade, de tentativa de resolução de problemas, etc., etc… funciona e funciona bem, dá… dá bons resultados. Agora há alunos que não conseguem, não gostam e … e aí, provavelmente terá que ser um processo mais dirigido… mais dirigista, mais rígido…"

A professora P4 considera que a matemática escolar incentiva todos os alunos a serem mais criativos e originais:

> (...) Este novo programa [Programa de Matemática do Ensino Básico, de 2007] penso que sim. Eu acho que incentiva os alunos a serem originais. Sim, sim, Porque eles têm que primeiro descobrir. Chegar às suas próprias conclusões. Para depois formalizar.

Para a professora P5, a matemática escolar incentiva todos os alunos a serem criativos e originais, mas também rigorosos e disciplinados, uma vez que a matemática não é estanque e padronizada para um determinado tipo de alunos:

> "Portanto, a matemática que se dá? (...) a serem criativos, se calhar criativos e originais de certa forma. Mas também o rigor, também… Acho que é uma coisa e outra. Acho que favorece tudo [todos os alunos], não posso estar a dizer que é só este. Só este, não. (...) A matemática não é algo estanque. (...).

A criatividade e a originalidade (tabela 69) são estimuladas pelas várias professoras, essencialmente através da liberdade que dão aos seus alunos para criarem os seus processos de resolução e pelo tipo de tarefas que propõem – problemas, tarefas exploratórias e tarefas abertas.

	11- Como é que, no seu caso, estimula a criatividade e originalidade dos alunos na disciplina de matemática?
P1	Mediante tarefas que incentivem a comunicação dos resultados, para que os alunos se apropriem de diferentes formas de resolução.
P2	Através de tarefas abertas e exploratórias que incentivem a comunicação e a interação entre os alunos.
P3	Através de problemas, com liberdade para encontrar a resolução.
P4	Propõe tarefas abertas.
P5	Tarefas com liberdade de resolução, sem imposição de estratégias ou processos de resolução.

Tabela 69 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 11

A professora P1 estimula a criatividade através de propostas que incentivam a comunicação e explicação dos resultados:

> “Mediante as tarefas que lhes são propostas [aos alunos] e depois o comunicar aos colegas as várias formas de resolução. Porque aí eles já vão começando a ficar despertos: olha posso fazer um esquema; olha posso fazer uma tabela; olha posso fazer…”

Para esta professora, a exposição de diferentes resoluções é importante para que os alunos se apropriem de diferentes estratégias e soluções:

> “Sim, aí eu não, não limito. Não é a minha resolução que é válida, não só... antes pelo contrário, dou valor a resoluções diferentes. (...) eles já sabem que o ser diferente é bom, que é valorizado, então daí que estejam à procura sempre de resoluções [diferentes] …”

A professora P2 foca-se nas tarefas para estimular a criatividade e a originalidade:

> “Através das tarefas que lhes proponho. Sempre tarefas que lhes permitam ir mais longe. Através também do trabalho cooperativo, através de materiais, mas especialmente o tipo de tarefas, tipo tarefa exploratória. Tem de ser uma tarefa aberta, não pode ser uma tarefa fechada senão não estimulo nada. Invisto também na interação entre eles, na comunicação. Também estimulo através da comunicação.”

Geralmente, para estimular a criatividade e a originalidade, a professora P3 propõe atividades de resolução de problemas:

> “Geralmente é sempre pondo um problema à… para tentar que eles descubram o caminho e a solução sem eu dar pistas. Dou-lhes liberdade.”

A professora P4 também coloca aos seus alunos tarefas abertas.

Já a professora P5, coloca ênfase na liberdade, dando aos alunos a possibilidade de resolver da forma que entenderem, sem lhes indicar qualquer caminho e sem condicionar as estratégias selecionadas, permitindo-lhes encontrar os seus próprios processos para chegarem às soluções pretendidas:

> “(...) Portanto, cada um… cada um vai resolvendo as tarefas como bem entende. Eu não dou, não dou um caminho (...). Vão ter liberdade para... de realizar as tarefas... os processos, o chegar aos resultados, às conclusões, tirar as conclusões.”

Embora sem unanimidade total, a maioria das professoras entrevistadas acredita que a matemática escolar incentiva todos os alunos a serem criativos e originais (tabela 68), não privilegiando apenas os mais rigorosos e disciplinados. No âmbito da criatividade, e de uma forma geral, as professoras estimulam o potencial criativo dos seus alunos (tabela 69) por via da comunicação das resoluções, da explicação das estratégias utilizadas e da liberdade de resolução sem imposição de estratégias ou métodos pré-definidos. De acordo com os dados das entrevistas, verifica-se que as professoras trabalham a autonomia dos seus alunos de forma a que se apropriem do conhecimento e compreendam o que aprendem. Esta liberdade permitida pelas professoras não significa que os alunos se envolvam na aprendizagem sem a sua orientação, mas apenas que lhes é permitida a interpretação e criação pessoal do conhecimento. Portanto, esta independência é influenciada pelo envolvimento dos professores de forma a ajudarem os alunos a associarem novo conhecimento às suas estruturas de conhecimento prévio, bem como a darem sentido pessoal ao como e quando devem usar o que aprenderam de forma significativa (Beghetto & Plucker, 2006).

Sendo assim, constata-se que as professoras procuram estimular e desenvolver a criatividade e originalidade dos seus alunos, acreditando que o mais importante não são apenas os conteúdos, mas também prática de fazer Matemática (Kattou, Kontoyianni & Christou, 2008). Portanto, entende-se que as professoras assumem a responsabilidade de garantir que os seus alunos aprendam os conteúdos de Matemática e que, simultaneamente, apoiam e desenvolvem o seu potencial criativo (Beghetto, 2013b). Para tal, infere-se que estimulam a motivação, confiança, curiosidade, exploração, encorajam a tomada de riscos e constroem ambientes propícios para a criatividade, incentivando a discussão (Tan, 2007).

Também todas as professoras identificaram atitudes ou formas de trabalhar especiais de alguns dos seus alunos durante a fase de apuramento do SUB12 (tabela 70), usando exemplos concretos, como se mostra a seguir.

	12- Ao longo da fase de apuramento identificou atitudes ou formas de trabalhar especiais de alguns alunos? Pode indicar algumas?
P1	Sim. Recurso a diferentes métodos de resolução. Recurso a esquemas.
P2	Sim. Recurso a tabelas, esquemas, gráficos, desenhos.
P3	Sim. Formas de resolver os problemas.
P4	Sim. Estabelecimento de conexões e relações.
P5	Sim. Organização e sequência do raciocínio.

Tabela 70 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 12

> "Sim. Pelos menos variavam, dependendo também do problema, variavam (...) os métodos, as resoluções, depende. A Helena, por exemplo fez, lembro-me de fazer um esquema… fazer esquemas… acho que até foi no das pulgas que ela fez tipo saltinhos e fez a resolução esquemática… agora não me recordo mais." (P1)

> "Sim, eles têm sempre formas especiais… Muitas vezes faziam tabelas, esquemas, gráficos, desenhos, recorriam muito a esquemas… Depende, depende muito do problema, mas eles arranjavam estratégias. Tentavam desenrascar-se." (P2)

> "Havia duas miúdas, uma de cada turma, que tinham alguma originalidade na resolução do… dos problemas. Da forma como … resolviam." (P3)

> "Sim. Eu até… por exemplo, no caso do… do aluno que ganhou o ano passado, o Bruno. É um miúdo que relaciona, faz imensas conexões. Ele vai buscar coisas que aprendeu (...) no 5.º ano, ainda agora, para utilizar no 7.º. Por exemplo, para explicar qualquer coisa. Ele não se esquece. Ele vai buscar e… nunca mais me esqueço. O ano passado, na prova de aferição, em que ele tinha que calcular uma coisa muito simples, que era aplicar uma fórmula, perímetro do círculo e ele fez aquilo com a propriedade distributiva. Foi buscar… não era necessária (...) É… é um aluno que às vezes me surpreende por isso" (P4).

> "Tive, tive. Pronto, o Hélder, pronto, notava-se diferença dos outros. Começou, no início tinha as suas dificuldades, mas depois para o fim via-se que conseguia fazer a sequência de... o raciocínio, tudo organizado, isso, destacou-se. E um outro miúdo, o Luís, também foi apurado mas não foi [à final]. (...) E esse Luís também tem um [bom] raciocínio… foi pena não ir." (P5)

A atenção dada pelas professoras à prestação dos seus alunos durante a fase de apuramento do SUB12 foi visível nos seus depoimentos. Esta atenção permitiu-lhes identificar, nomeadamente, diferentes métodos de resolução, com recurso a diferentes tipos de representação (tabelas, esquemas, gráficos, desenhos, esquemas), o estabelecimento de conexões e relações, a forma de organização da resolução e sequência de raciocínios. São professores atentas à forma como os seus alunos utilizam as suas capacidades intelectuais, o que as coloca numa posição privilegiada para observar e incentivar a capacidade criativa e o conhecimento nela contido (Ward, 2007). Curiosamente, embora na questão acerca do conceito de criatividade estas professoras não tenham feito uma ligação entre criatividade e modos de representação ou uso de representações externas, consideraram aqui que uma das marcas diferenciadoras na forma de trabalhar e resolver problemas de alguns dos seus alunos reside no modo como estes são capazes de usar diversas representações.

A Matemática numa vertente competitiva

No que diz respeito à sua perceção das vantagens para a aprendizagem da Matemática em relação ao SUB12, perante a questão 13 (tabela 71), todas as professoras entrevistadas consideram que é uma atividade que tem reflexos bastante positivos nos seus alunos, sobretudo na capacidade de resolução de problemas, fruto da liberdade dos alunos de chegar aos seus próprios caminhos, bem como no seu gosto pela Matemática e por desafios matemáticos.

	13- Qual a sua opinião sobre o SUB12? Acha que esta atividade é importante para o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática? Explique porquê.
P1	Muito interessante. Promove a atividade de resolução de problemas. Incentiva a diversificação das estratégias, permite métodos de resolução pessoais e motiva o empenho e o gosto pela matemática.
P2	Os problemas propostos são interessantes para serem explorados em sala de aula.
P3	Extremamente estimulante. É um desafio. Descobrir e comunicar cada resolução tem um efeito positivo na disciplina de Matemática.
P4	É importante. Motiva os alunos, também pelos prémios. Desmistifica a Matemática como uma disciplina difícil. Os alunos são desafiados e ao mesmo tempo que resolvem problemas, raciocinam e usam o conhecimento adquirido
P5	É uma atividade de que os alunos gostam. Motiva-os para a Matemática e incentiva a comunicação.

Tabela 71 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 13

> "Eu acho que é uma iniciava muito interessante e importante porque estimula os alunos na resolução de problemas. E fá-los [aos alunos], ao resolvê-los [os problemas], fá-los procurar outras estratégias também, aprofundar e desenvolver métodos pessoais. (...) Dá-lhes mais gosto e mais empenho na matemática. Ao mesmo tempo serve as duas coisas, a matemática ao serviço dos problemas e os problemas ao serviço da própria matemática." (P1)
>
> "Sim acho, acho que sim, até porque se nós utilizarmos o SUB12 no Estudo Acompanhado também… ou mesmo na aula de Matemática (...) são problemas interessantes e dá para explorar depois na aula e ver também a resolução que eles fizeram." (P2)
>
> "Acho que é um jogo extremamente estimulante. (...) há vários anos que esta escola tem alunos que participam. (...) Porque por um lado eles ficam mais entusiasmados na resolução de problemas, é um desafio para eles tentarem resolver e fazer certo. (...) É uma atividade paralela [à disciplina de Matemática] que… para já dá-lhes muito gozo... a alguns (...). Na parte, depois, da matemática esse gosto do desafio, de tentarem descobrir, como é que se resolve e de saber explicar como é que se resolve, acho que depois se reflete positivamente na disciplina." (P3)
>
> "Para já porque o facto de ser um concurso motiva os miúdos. Eles estão sempre… querem logo saber qual é o prémio. E depois o prémio é muito aliciante, na opinião deles. Por ser um concurso de matemática, que é sempre vista como aquela disciplina horrorosa, que ninguém

gosta, o bicho papão. E afinal também tem coisas giras. (...). Depois os miúdos gostam muito. Encaram aquilo como um jogo, um desafio. E por outro lado estão a resolver problemas. Estão a pensar. Estão a raciocinar. Estão a… acho que estão a utilizar aquilo que aprenderam. Sim. ” (P4)

“Acho que é um… concurso, uma atividade interessante e… que os miúdos gostam (...). Acho que é interessante (...) para já por ser o concurso... Para os miúdos, concursos e prémios… os miúdos ficam mais… mais interessados e gostam. Ah… e depois aproveitando esse facto … que a matemática é o tal bichinho (...) acho que os motiva [para a matemática]. Ah, e depois há o facto da comunicação porque pede para [descrever o processo] … têm que escrever tudo, descrever (...) e isso é importante para a comunicação (...).” (P5)

É possível constatar que as professoras entrevistadas consideram que o SUB12, motiva os seus alunos para a resolução de problemas, atendendo às suas próprias necessidades de aprendizagem, de acordo com as suas aptidões. É um meio competitivo que permite dar visibilidade às estratégias e formas de comunicação utilizadas; constitui uma ferramenta valiosa para penetrar no pensamento genuíno, ajudando a compreender o raciocínio dos jovens; e fomenta o uso e desenvolvimento de estratégias próprias (Freiman & Lirette-Pitre, 2008). Desta forma, considera-se que as professoras entendem o SUB12 como um contexto de espaço e liberdade para o emergir de ideias e resoluções criativas, com especial atenção para eventuais processos de resolução invulgares ou fora do comum, onde se reconhecem e valorizam os atos criativos (Applebaum & Saul, 2009). Esta visão das professoras é complementar à dos seus alunos (Questão 6, Tabela 40), inferindo-se que o SUB12 é uma atividade complementar ao trabalho desenvolvido em sala de aula, pela influência que tem no processo de ensino e aprendizagem e no desenvolvimento das capacidades transversais.

Relativamente à opinião que têm sobre os problemas propostos no SUB12, procurada com a questão 14 (tabela 72), a maioria das professoras considerou que eram interessantes e com graus de dificuldade variados, possibilitando vários processos de resolução.

	14- O que pensa dos problemas propostos no SUB12?
P1	São desafiantes e motivadores. Incentivam diversos modos de resolução. Fomentam a persistência dos alunos.
P2	Alguns problemas suscitaram dúvidas, uns são fáceis e outros são difíceis.
P3	Os problemas são interessantes. Problemas com algum grau de dificuldade, desde o fácil ao complicado.
P4	Problemas interessantes e que valem a pena. Problemas com vários caminhos de resolução. Alguns difíceis.
P5	Problemas interessantes e engraçados. Alguns difíceis.

Tabela 72 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 14.

A professora P1, para além de destacar a variedade dos problemas, considerou alguns especiais, como por exemplo:

> "Acho, acho que são variados e alguns, em especial… gostei muito destes últimos… gostei muito de um que era da pulga, os saltos da pulga e… porque, pronto, apela a diversas… a diversos modos ou métodos de resolução."

De acordo com a professora, são problemas desafiantes ao ponto de os alunos persistirem até encontrarem a solução:

> "(...) Acho que sim, acho que sim [são problemas desafiantes e motivantes]. Sim… daí a tal persistência, [os alunos] querem chegar sempre até ao fim e não desistir."

Embora a professora P2 não esteja atualizada relativamente aos problemas propostos na edição do presente ano, por não ter acompanhado de perto os seus alunos durante a competição nesta edição, suporta a sua perspetiva em edições anteriores, considerando os problemas do SUB12 interessantes. No entanto, confessou que encontrou alguns que achou não serem adequados aos alunos:

> "(...) Este ano não estive muito ligada mas quando estava ligada acho que eram problemas sempre interessantes. Às vezes achava que alguns não [eram adequados ao nível dos participantes] … Havia alguns que suscitavam algumas dúvidas em termos de linguagem… Lembro-me de um do Popeye [problema 1, edição 2008/09] do ano passado ou de há dois anos que estava ali que não era muito claro. Alguns não são assim muito claros… Era, era, havia ali [um problema] … que… eu e uma colega estivemos ali com dúvidas… E depois há alguns que são muito fáceis e depois há uns que são mais exigentes. (...) Na globalidade acho que é positivo."

A professora P3 considerou interessantes todos os problemas propostos no SUB12 aos quais teve acesso, referindo que desconhecia os da final por não estarem acessíveis no site do campeonato, dado que por diversas vezes consultou o local para o efeito:

> “(...) achei-os todos interessantes… os doze… porque por acaso não vi os que saíram na final. Os da final não vi (...) fui algumas vezes ao site (...) e só aparecia a fotografia dos premiados. (...) Achei-os interessantes [os problemas da fase de apuramento], agora há alguns que tinham algum grau de dificuldade. (...) Também é difícil estar tudo [os problemas] sempre com o mesmo grau de dificuldade, como é evidente. Havia uns que eram mais fáceis do que outros, eles começaram logo a perceber como é que se fazia. E houve outros que foram mais complicados, eu agora não me lembro… eles foram doze, já não me lembro.”

Após o investigador ter relembrado alguns dos problemas propostos durante a fase de apuramento do campeonato, a professora conseguiu identificar um caso concreto, no qual os alunos tiveram muitas dificuldades:

> “Esse. Exatamente. O das flores. Esse foi muito complicado. Esse foi feito com a nossa ajuda. (...) Porque (...) as flores tinham todas preços diferentes. E havia ali uma série de incógnitas, porque eles só sabiam o preço do bouquet. Portanto, fomos anulando, por hipóteses. Mas eles não iam lá sozinhos (...). Para 5.º ano eu achei muito, muito difícil. Eles não conseguiam fazer sem a nossa ajuda.”

O problema com o elevado grau de dificuldade considerado pela professora foi o problema “Bouquets de flores a 6 euros”, correspondente ao problema dois, da fase de apuramento 2009/2010, que em muitos casos só foi resolvido com ajuda. Para a professora, embora obedecesse a uma estratégia de tentativa e erro, a integração de números decimais dificultou a resolução, ao ponto de os alunos quererem desistir, por pensarem que não eram capazes e que os problemas seguintes poderiam ser mais difíceis, uma vez que este foi proposto no início da fase de apuramento do campeonato.

Do ponto de vista da professora P4, os problemas propostos revelaram-se interessantes:

> “(...) eu acho que na generalidade são interessantes, são… são problemas que valem a pena. Há um ou outro que por vezes… que por vezes podem ter duas interpretações. Já me aconteceu isso. E os alunos, uns interpretaram de uma forma e fizeram uma determinada resolução e outros de outra forma. Às vezes, quando isso acontece, eu discuto aqui com os meus colegas, já tem acontecido e mandamos um email à equipa.”

Quando questionada acerca dos problemas propostos no SUB12, a professora P5 referiu também que são interessantes e alguns deles um pouco difíceis:

> “São interessantes, são engraçados… e… apesar de que, às vezes, um ou outro… eu achar que eram assim um bocadinho difíceis.”

Quando o entrevistador pediu para indicar um exemplo, mais uma vez teve que relembrar os problemas propostos na fase de apuramento, dado que a professora não se lembrava, tal como a professora P3:

> **Entrevistador:** Se calhar o das flores [Bouquets de flores a 6 euros]?
>
> **Professora P5:** Acho que era.
>
> **Entrevistador:** O das flores era, era intuitivo, mas era preciso trabalhar muito sobre ele.
>
> **Professora P5**: Era preciso e então até houve miúdos que queriam desistir já… isso não. Acho que foi um bocadinho mau, foi o primeiro ou o segundo e então desmotivou-os."

A criatividade geralmente prospera em ambientes que alimentam o interesse pessoal, a satisfação e o envolvimento com tarefas desafiadoras (Beghetto e Kaufman, 2013). Neste seguimento, e de uma forma geral, embora tenham considerado alguns dos problemas difíceis, as professoras consideraram os problemas propostos interessantes. A variabilidade do grau de dificuldade, para além de evidenciar a adequação dos problemas a todos os participantes, também revela a essência da definição de problema, ou seja, a ausência aparente e imediata da respetiva solução. Os problemas colocados no SUB12, portanto, não se destinam apenas a um determinado público-alvo, mas a todos alunos, sendo que o sucesso depende muito do gosto pela resolução de problemas e da persistência de cada participante. Mais uma vez, a perspetiva das professoras face ao SUB12 corrobora a dos seus alunos participantes nesta investigação (questão 6.2, Tabela 40) relativamente à opinião sobre os problemas do SUB12. Desta forma, infere-se que o SUB12 é um ambiente que propõe aos alunos problemas desafiadores, que incentivam a procura de ideias próprias e, ao mesmo tempo, fomentam uma nova visão sobre os problemas (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012), colocando à prova o conhecimento dos alunos e a sua forma de raciocinar, resultando muitas vezes em produtos criativos. De facto, é possível constatar que os problemas propostos no SUB12, mesmo os menos complexos, permitem a abstração e a generalização, incentivam a investigação, discussão e argumentação, promovem o uso e aplicação de princípios matemáticos profundos e possibilitam o uso do conhecimento matemático existente, tal como a sua extensão (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009). A essência do ensino da matemática de forma criativa, depende da proposta de problemas que possibilitem métodos distintos de resolução e que, ao mesmo tempo, incentivem os alunos a irem para além do conhecimento que dominam para encontrar cada solução (Mann, 2006).

Participar no SUB12 é um desafio para os alunos (questão 15 tabela 73), como consideram, de uma forma geral, as professoras entrevistadas, alegando variadas razões.

	15- Considera que a Participação no SUB12 é um desafio para os alunos? Porquê?	**15.1- Costuma incentivar os seus alunos a participar neste tipo de campeonatos? Porquê?**
P1	Sim, porque é uma atividade desafiante para aprofundar e desenvolver competências.	Sim, para treinarem e ganharem poder matemático.
P2	É um desafio, dado que as resoluções podem ser melhoradas através do *feedback* fornecido.	Sim, porque ajuda os alunos a irem mais além.
P3	Sim, porque é um desafio.	Sim, ajuda a desenvolver capacidades e competências.
P4	Sim, porque é um desafio chegar à final.	Sim, pelos efeitos positivos na comunicação matemática, dado que é preciso explicar cada estratégia usada. E é um banco de problemas ao qual os professores podem recorrer.
P5	Sim porque é uma competição que obriga os alunos a pensar.	Sim, dado que é uma forma de trabalhar matemática com todos os alunos.

Tabela 73 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 15.

Para a professora P1, a participação no campeonato complementa a aprendizagem feita na aula de Matemática:

> "Complementa, em parte, as aulas e são mais desafios que eles [os alunos] podem aprofundar e desenvolver as suas competências."

Sendo assim, a professora costuma incentivar os seus alunos a participar neste tipo de iniciativas, considerando que isso lhes permite praticar e adquirir segurança:

> "(...) treinar. O ganhar, ganhar poder matemático."

A professora P2 considera que este tipo de atividades constitui um desafio:

> "(...) Acho que é um desafio porque (...) porque também têm um feedback do outro lado… e às vezes têm que melhorar ou explicar melhor [as resoluções]… é sempre um desafio, é algo que não é imediato. Eu costumo incentivar (...). Porque acho que é sempre importante qualquer coisa [atividade] exterior à escola, não ser só algo que se passa na escola, eles também têm que ir mais além… É importante."

De acordo com a professora P3, só o facto de ser um concurso no qual se usa o computador é diferente do contexto de sala de aula e, portanto, já constitui um desafio. No entanto, reconhece que nem todos revelaram, durante todo o campeonato, a motivação inicial:

> "(...) quer dizer, é para alguns. (...) Quando lhes falei do jogo, fiz a primeira sensibilização (...) toda a gente queria participar. E eu disse: tudo bem. Vamos embora. (...) Há alunos que funcionam por espontaneidade (...), o primeiro problema ainda o fizeram… mas, para concorrer é preciso ter, também, disciplina. Não é só o facto de eu chamar a atenção: Atenção que já há novo problema online; têm que o ir ver, têm que tentar resolvê-lo. Mostrarem-mo. Têm 15 dias para o resolver. (...) isso tem muito a ver com a personalidade do aluno… havia… houve alunos que começaram, fizeram os dois primeiros exercícios [problemas das duas primeiras jornadas] e depois ou porque se esqueciam de lá ir… mesmo que eu lhes chamasse a atenção… ou porque começaram a achar que aquilo era [aborrecido]… desmotivaram-se. (...) Da turma eu teria bem à vontade doze a quinze participantes iniciais, todos cheios de garra… terminei com seis. E esses seis eram bons. E eu tive pena porque só foram seis à final."

Do ponto de vista da professora, acabam por continuar a competir apenas os que gostam de resolver de problemas e se sentem motivados:

> "Pela competição… o gozo de verem que conseguem fazer. E isso nem todos os miúdos têm… aliás os adultos também. Tem muito a ver com a personalidade."

O que leva a professora a motivar os seus alunos para participarem no SUB12 é a possibilidade de darem o seu melhor, mais do que a competição entre eles:

> "(...) facto de ajudar. Deles próprios se porem em competição com eles próprios, para conseguirem ver até que ponto eles conseguem estar em jogo e conseguem ter bons resultados. (...) embora eu ache que a competição seja necessária… saudável… eu foco muito a competição com eles próprios, essencialmente, do que… comparativamente. Isto faço durante todo o ano e mesmo nos testes e nos trabalhos e não sei quê… Porque quero que eles tenham a noção que é para eles próprios desenvolverem capacidades ou competências. E depois, porque realmente é uma… uma achega positiva para a matemática."

Na perspetiva da professora P4, o SUB12 é um desafio para os seus alunos e que serem apurados para a final é um objetivo para eles:

> "(...) Porque é… para já é… porque são doze problemas. Não é um só. Eles têm que ir sempre ultrapassando cada etapa. E tem um objetivo que é… que é chegar… conseguir pelo menos dez... dez problemas

corretos… bem, bem feitos. E ganhar aquele prémio. Irem à final, para depois poderem ganhar o prémio que eles tanto querem.”

A professora afirma que incentiva os seus alunos a participarem no SUB12 desde sempre:

“Desde que começaram. Desde a primeira edição. (...) porque vejo que é uma… uma atividade interessante, que está bem organizada e à qual eles aderem com interesse.”

Para a professora o impacto desta atividade na Matemática que ensina, em sala de aula, é visível a longo prazo, ao nível da comunicação e do raciocínio:

“(...) Porque eles têm que explicar o processo de resolução. Eles não podem dizer meramente a resposta. Eles têm que explicar. Se explicarem, mais garantias têm que a sua resposta seja aceite. E… e eu acho que isso reflete-se. Em vez de ser eu a levar um problema para a aula… tenho ali um problema, que ainda por cima é… é igual para todos, faz parte de um concurso e utilizo-o como a… como a… como é que hei de dizer… um recurso, no fundo… para mim.”

A professora P5 considera que o desafio está no facto de fazer os alunos pensar, também potenciado pelo ambiente competitivo:

“Acho que sim. É porque (...) os… faz [os alunos] pensar (...). E é a competitividade… é isso, a competitividade (...), eu notava mesmo entre a turma… Havia, via-se que quando vinham os resultados… o não sei quê já está excluído, outro… eu ainda estou. Pronto, havia, notava-se que havia aí a competitividade.”

A razão por que incentivava os seus alunos a participar no SUB12, era o facto de ser uma forma de trabalhar diferente em Matemática:

“(...) para já, é uma forma de se trabalhar matemática [de maneira] diferente. (...) incentivava todos.”

Além disso, os problemas do SUB12 podiam ser feitos na sala de TIC, onde podiam aceder aos computadores, ou no Clube de Matemática.

Para todas as professoras, o SUB12 é um desafio para os seus alunos aprofundarem competências e capacidades matemáticas e, desta forma, “ganharem poder matemático” para irem mais longe, além de que é um recurso ao qual os professores podem recorrer para apoiar o trabalho em sala de aula com os seus alunos, devido ao banco de problemas que disponibiliza (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004).

Pelo facto de o SUB12 oferecer outras oportunidades para o desenvolvimento do poder matemático, para além das que existem no contexto escolar e tendo em conta os níveis de aptidão de cada um, as professoras assumem incentivar os seus alunos a competir nessa iniciativa. Face a esta realidade, o SUB12 não é apenas uma oportunidade para desenvolver e aumentar as capacidades de resolução de problemas, comunicação e raciocínio, também é um meio para atrair os alunos para a Matemática (Freiman & Lirette-Pitre, 2008). Mais uma vez o ponto de vista das professoras relativamente ao SUB12 como um desafio é comum ao dos seus alunos (Questão 7, tabela 41).

Todas as professoras entrevistadas consideram que os alunos que são mais aptos na resolução de problemas são também mais competitivos (questão 16, tabela 74), por diferentes razões:

	16- Acha que estes alunos que são bons na resolução de problemas são mais competitivos? Qual é a sua perceção?
P1	Sim. Entusiasmam-se mais. No entanto há alguns que competem por satisfação pessoal.
P2	Sim. São mais competitivos, mas no sentido saudável.
P3	Sim. Ficam mais espevitados quando têm sucesso e consequentemente desafiados.
P4	Sim. Devido à satisfação, à valorização e destaque que obtêm quando têm sucesso.
P5	Sim. O facto de quererem resolver primeiro do que os outros torna-os mais competitivos.

Tabela 74 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 16

"Acho que sim, acho que sim. Porque ganham aquele entusiasmo [de competir] e querem sempre fazer mais, mais e certo e cada vez mais. Quer dizer, depende, também, estou a pensar no Pedro, o Pedro também era muito bom e não o achava competitivo (...) ele ficava contente, muito contente (...) de resolver [os problemas do SUB12] (...) nem tinha que ser melhor [resolvedor] do que o outro..." (P1)

"Podem ser competitivos mas no bom sentido, não é competitivos no sentido de serem individualistas. Não é nesse sentido do competitivo: olha eu sou melhor que tu, não. Mas sim, tanto que vão a concurso e tudo, e vão à competição." (P2)

"São porque… a partir do momento em que eles têm sucesso a… espevita a vontade de fazer outro [problema] e mais outro. Como desafio, se já fiz este, vou conseguir fazer o outro… portanto… isso entra depois em cadeia." (P3)

"(...) São um bocadinho. Porque eles… os que são bons, ficam muito satisfeitos por conseguirem. E como verificam que nem todos conseguem a… é algo que eles veem como uma coisa que… que é boa... para eles, porque é muito valorizada pelos professores. E que por nem todos conseguirem, sentem-se… como é que hei de explicar… ficam muito satisfeitos com eles próprios. Valorizados, destacados. Às

> vezes até podem não ser tão bons noutras coisas e ali são. E eu noto que alguns são competitivos, são." (P4)

> "Às tantas, se calhar. Porque são melhores, acabam por, acabam primeiro [do que os outros]. (…) São os primeiros que acabam. Acho que [a competição] torna-os mais competitivos e depois [também] no dia-a-dia." (P5)

Para as professoras, os alunos que são bons a resolver problemas são mais competitivos e pelo facto de terem sucesso assumem a atividade como um desafio no confronto direto com os seus pares. Sendo assim, o SUB12 é uma das vias para os alunos que gostam de resolver problemas manifestarem as suas potencialidades e capacidades matemáticas (Perleth & Wilde, 2007). O caráter desafiante do SUB12 na aprendizagem da Matemática é um fator de enriquecimento que permite aos participantes exibirem as suas habilidades de uma maneira especial (Taylor, 2009). Tal como no caso dos alunos entrevistados, face aos testemunhos das professoras, constata-se que o SUB12 pode ter um poderoso impacto positivo na vida curricular dos participantes (Treffinger, 2008).

O SUB12 e o conhecimento matemático

Só a professora P4, perante a questão 17 (Tabela 75), entende serem necessários conhecimentos de conteúdos matemáticos, pelo menos tratados em anos anteriores, para resolver os problemas do SUB12. As restantes entrevistadas foram de opinião de que não são requeridos conhecimentos matemáticos específicos.

	17- Considera que para resolver os problemas do SUB12 é preciso que os alunos tenham conhecimento de conteúdos de matemática? Porquê?
P1	Não necessariamente. Dependendo do problema, o raciocínio permite recorrer a várias estratégias, fazer esquemas e desenhos, listas de palavras.
P2	Nem sempre. O conhecimento desprovido de conteúdos matemáticos também permite chegar às soluções (por exemplo: provas de aferição).
P3	Não. É mais importante terem conhecimento de português, por causa da interpretação.
P4	É preciso ter conhecimento matemático aprendido anteriormente.
P5	Não é necessário ter conhecimento específico de conteúdo matemático, mas é necessário algum conhecimento.

Tabela 75 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 17

> "Dos conteúdos que nós estamos a dar naquele ano ou naquela altura, não. Mas daquilo que já aprenderam. (P4)

Para a professora P1, os alunos não têm necessariamente que ter conhecimento de conteúdos de Matemática para resolver os problemas do SUB12:

> “Não necessariamente, não necessariamente. Porque… com o seu raciocínio e… podem ir por várias estratégias (...) fazer um esquema… fazer um desenho, uma lista de palavras. Não tem que forçosamente [recorrer a conhecimento matemático]… também depende do problema, pode ser mais propício ou não, mas desde que seja bem escolhido pode, pode suscitar outras... [formas de resolução].”

Tal como a anterior, a professora P2, considera que para resolver problemas os alunos nem sempre têm que estar dotados de conhecimentos de Matemática:

> “Não, nem sempre. Porque às vezes não está relacionado diretamente com conteúdos, mas sim com raciocínio, com a maneira de pensar, com aquela estratégia, arranjar uma estratégia. (...) É como nas provas de aferição, eu às vezes digo-lhes que estes problemas não têm a ver com o conteúdo, muitas vezes. Vocês é que têm de arranjar aqui uma maneira de perceber porque, essencialmente, é interpretar e arranjar uma estratégia.”

Também a professora P3 é da opinião de que os alunos não têm de ter conhecimentos prévios de Matemática:

> “Não [necessitam]. Têm que ter muitos conhecimentos de Português e de interpretação. Muitos mesmo.”

A posição da professora P5 é a de que os alunos não precisam de saber especificamente um determinado conteúdo, para resolver os problemas do SUB12:

> “Não. Eu verifiquei… os [problemas do SUB12] que têm saído e acho que não é preciso (...) têm que ter um conhecimento [matemático] mínimo. Mas tipo… saber especificamente um determinado conteúdo, só para fazer? Não. Porque depois víamos que dava para ir por várias maneiras.”

Embora a maioria das professoras assuma ser necessário algum conhecimento de conteúdos de Matemática para resolver os problemas propostos no SUB12, consideram que não é verdadeiramente essencial, explicando que o raciocínio é muito mais importante e que os alunos podem encontrar formas de resolver que não requerem conhecimentos específicos. Ao contrário, os seus alunos consideram que o conhecimento é muito importante, exceção feita aos problemas de lógica (Questão 11, Tabela 42). Verifica-se aqui uma divergência entre a posição dos alunos e dos professores, eventualmente porque os alunos consideram ser mais fácil e porventura útil usarem o conhecimento matemático para resolver os problemas propostos. Esta questão, sobretudo porque se prende com a importância e relevância da fluência do conhecimento matemático, parece merecer uma renovada atenção em futuras investigações, dado que os dados recolhidos neste estudo não permitem abordá-la mais exaustivamente. No entanto, o ponto de vista das professoras oferece a ideia de que para elas é importante incentivar a criatividade através do desenvolvimento da compreensão matemática. São professoras que não insistem apenas em procedimentos, rapidez e precisão para resolver problemas, mas, também, tentam proporcionar um ambiente seguro onde os alunos possam ir além do conhecimento que dominam, com oportunidades para fazer fluir o seu raciocínio matemático (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012).

No que diz respeito às maiores dificuldades detetadas nos alunos (questão 18, tabela 76), o testemunho da professora P2, mais uma vez, é baseado em edições anteriores, dado que não acompanhou de perto o desenrolar do campeonato, durante esta edição.

	18- Quais foram as maiores dificuldades que detetou nos seus alunos, durante a resolução dos problemas do SUB12? Indique-as.
P1	Interpretação e comunicação. Falta de persistência e de apoio.
P2	Interpretação e compreensão. Precipitação. Excesso de confiança.
P3	Interpretação e compreensão dos problemas.
P4	Interpretação, compreensão dos enunciados e comunicação dos resultados.
P5	Interpretação dos enunciados e comunicação dos resultados.

Tabela 76 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 18

Ainda assim, a referida professora convergiu com as restantes ao apontar a comunicação e a interpretação como as maiores dificuldades que surgiram durante a resolução dos problemas do SUB12:

> "Pois, era a dificuldade de interpretação dos enunciados, a comunicação. Não perceber o teor do problema. Depois, alguns não eram tão persistentes como isso. Eu também tive culpa aí. Os que eram persistentes, pronto, levavam o problema até ao fim, faziam sempre. Agora, outros precisavam mais de um empurrãozinho." (P1)

> "As principais dificuldades… muitas vezes, estão relacionadas com a interpretação, mas não é só no SUB12 (...). É o interpretar, é o perceber, às vezes precipitarem-se, é a precipitação… ou por que acham fácil e não leem bem e como não leram bem acham fácil e erram. Muitas vezes é isso. Às vezes é também excesso de confiança, nos bons alunos é excesso de confiança." (P2)

> "As [dificuldades] que eu detetei foram todas a nível interpretativo. Todas. (...) os alunos que me colocavam dúvidas e que me mandavam os emails para casa e que falavam diretamente comigo na aula, a dúvida que eles me punham sempre era tentar entender o problema. E isto nota-se… notou-se essencialmente até metade mais ou menos do campeonato. Porque eles depois engrenaram no tipo de linguagem do

> tipo de problema (...) já conseguiam resolver. (...) Já começaram a ficar mais autónomos e a questionar-me muito menos em relação ao que iam… ao que é que era para fazer.” (P3)

> “Eu acho que a maior… a maior dificuldade é interpretar o enunciado. Alguns, quando são muito extensos. (...) depois quando nós desmontamos o enunciado eles percebem que aqueles são os dados, o que é que têm que fazer, eles conseguem… alguns. Nem todos. E depois, outra coisa, é escrever. Explicar, sim. O processo de resolução. Também é outra grande dificuldade. (...) Porque eles dizem-me assim, às vezes dizem-me assim: ó professora isto é assim, dá isto. Sim, mas como é que chegaste a esse valor? Ai, eu não sei explicar.” (P4)

> “Comunicação. Portanto, escrever, descrever, como chegou… a comunicação mesmo, é mesmo… Também (...) sim, um bocadinho de interpretação, mas ainda mais, acho que ainda mais foi a comunicação.” (P5)

As professoras confirmam o tipo de apoio que os alunos dizem ter recebido (Questão 12 Tabela 46), principalmente na interpretação e compreensão dos enunciados, bem como na comunicação dos resultados. Desta forma, as professoras assumem-se como mediadoras na resolução dos problemas propostos no SUB12, colaborando com os alunos e ajudando-os a desfazerem-se de bloqueios emocionais, como o medo de errar, o medo de ser criticado, sentimentos de inferioridade e insegurança (Gontijo, 2010). Ao mesmo tempo que os alunos constroem ativamente o seu conhecimento e compreensão, as professoras funcionam como mediadoras, questionando, fornecendo dicas e pistas e, ao mesmo tempo, ajudando-os a pensar de maneira mais profunda sobre os conceitos, ideias e contextos matemáticos. Os professores mais eficazes destacam-se pela sua capacidade de equilibrar o desenvolvimento cognitivo dos alunos com a estrutura curricular, permitindo-lhes expressarem as suas ideias, pessoalmente significativas e, por vezes, originais (Beghetto & Kaufman, 2007), ajudando-os a compreender como essas ideias se enquadram dentro das convenções e restrições curriculares (Beghetto, 2013b).

Aptidão para a resolução de problemas

Quando foi pedido às professoras entrevistadas que descrevessem um aluno com grande aptidão na resolução de problemas (questão 19, tabela 77), obtiveram-se depoimentos com tónicas variadas.

	19- Como é que descreveria um aluno com grande aptidão na resolução de problemas?
P1	Com traquejo matemático, persistente e entusiasta.
P2	Com bom pensamento matemático, que analisa e é perspicaz.
P3	Sabe interpretar e encontrar formas de chegar aos resultados.
P4	Sabe interpretar, sabe organizar e combinar os dados e concebe uma estratégia de resolução adequada.
P5	Sabe comunicar, interpretar e consegue resolver, independentemente do caminho que utilizar.

Tabela 77 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 19

> "Uma aluno persistente e, também, com algum traquejo ao nível da matemática e persistência e entusiasmo também, pela matemática também." (P1)
>
> "É um aluno que analisa aquilo que se pretende calmamente, tem de ter calma a analisar o problema em si e depois tenta arranjar uma estratégia de resolução. Um aluno… tem que ter um… sim, tem de ter um bom pensamento matemático… Não quer dizer que um aluno que não tenha um bom pensamento matemático também não consiga lá chegar. Tem é que trabalhar mais. Há aqueles alunos que veem logo. Conseguem logo… Até mesmo mentalmente conseguem logo ver… Alguns resolvem mentalmente… mas muitas vezes… o A3 é assim, ele vê logo, deteta muito bem… É perspicaz." (P2)
>
> "Um aluno que sabe interpretar. Que sabe encontrar uma forma de chegar ao resultado certo." (P3)
>
> "Um aluno que lê o enunciado e percebe, sem ajuda. Que consegue organizar os dados e utilizá-los para depois conseguir conceber uma estratégia adequada à resolução. Seja ela qual for. Cálculos, esquemas… E que tem um fio condutor lógico, do princípio até ao fim, até chegar à resposta, que é a resposta à pergunta que lhe foi feita, no início." (P4)
>
> "Então, tem que saber comunicar, interpretar, comunicar e conseguir resolver seja que caminho siga." (P5)

A opinião das professoras, relativamente à aptidão de um aluno que gosta de resolver problemas é próxima da dos alunos e, portanto, partilham do mesmo ponto de vista. De acordo com as professoras, um bom resolvedor de problemas combina habilidades (raciocínio, pensamento lógico, comunicação, rapidez, facilidade de resolução,...), com caraterísticas psicológicas (inteligência, calma, persistência, empenho, atenção,...) para compreenderem as relações entre os conceitos, os dados e os modelos da situação (Freiman, 2006).

A professora P1 coloca de parte a correspondência entre ser bom aluno na disciplina de Matemática e ser competente na resolução de problemas (questão 20, tabela 78), dando um exemplo concreto, como podemos ver a seguir:

> "Olha, eu tenho um aluno que no primeiro período dei-lhe 1, no segundo período 2, terceiro período 3. Este é um exemplo de um aluno, em termos de níveis, classificações, desempenho que era fraquito, esteve à beira de chumbar. A nível de resolução de problemas era excelente. (...) E era um aluno que não fazia nenhum, ele não trazia livro, não trazia caderno. Mas sempre que eu apelava ao raciocínio (...) acompanhava e excedia às vezes mesmo as que eu tenho aqui [refere-se às alunas A1 e A2]. (...) E atividades de investigação, ainda chegámos a fazer algumas… pouquinhas, este ano, mas chegámos a fazer e ele descobria ali regularidades que era uma coisa [estala os dedos]… e no entanto…"

Na perspetiva da professora P1, os alunos que são competentes na resolução de problemas, não têm que ser obrigatoriamente os mais criativos e originais quer em Matemática quer nas outras áreas. Mais uma vez dá um exemplo concreto, descrito a seguir:

> "Não, o que não tem muito a ver. Eu tinha…, vou buscar exemplos, um aluno este ano que era… eu achava… que era o que eu achava mais criativo, (...) nas outras áreas era fraquito, mas na matemática… era mesmo o forte dele."

	20- Considera que há alguma correspondência entre ser bom aluno na disciplina de matemática e ser competente na resolução de problemas?	**20.1- Considera que os alunos competentes na resolução de problemas são os mais criativos e originais quer em matemática quer nas outras áreas?**
P1	Não.	Não é obrigatório.
P2	Nem sempre.	Geralmente sim. No entanto há alunos que não gostam de resolver problemas.
P3	Alguma.	Não é obrigatório.
P4	Alguma.	Não tem a certeza. No entanto não descarta a implicação.
P5	Depende.	Não.

Tabela 78 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 20.

Tal como a anterior, a professora P2 desvaloriza a correspondência entre ser bom aluno na disciplina de Matemática e ser competente na resolução de problemas:

“Nem sempre, tudo depende do que é a Matemática. (...) Eu tinha alunos, lembro-me perfeitamente que ficaram chocados porque na aula de Matemática nunca mais havia Matemática, nunca mais se fazia contas (...) e um [aluno] estava chateadíssimo porque não era isso a que ele estava habituado. Porque ele era muito bom aluno, sempre foi muito bom aluno a Matemática e agora de repente chega aqui e tem de fazer problemas, tem de fazer atividades investigativas. E as contas? É o fazer contas… Tabuada, muito bem, e tudo isso. (...) Depende do que é a Matemática. Para mim, a Matemática também é resolução de problemas, entre outras coisas. (...)”

Já no que diz respeito a ser competente na resolução de problemas implicar ser mais criativo e original, quer em Matemática, quer nas outras áreas, a professora considera que geralmente há correspondência, embora admita que há casos que provam o contrário:

“Geralmente, geralmente sim. Agora, tenho alunas que são boas alunas a Matemática mas que não são muito criativas na resolução de problemas (...). Há alunos que continuam ainda a rejeitar um pouco a resolução de problemas (...) Não gostam… Dá muito trabalho… trabalho: professora, pensar, professora, pensar… Estou-me a lembrar da Carla, por exemplo, que podia ir muito mais longe… Não vai mais longe por isso mesmo.”

Já a professora P3, considera que há alguma correspondência entre ser bom aluno na disciplina de Matemática e ser competente na resolução de problemas, se bem que uma coisa não implica obrigatoriamente a outra. Relativamente à implicação de que os alunos competentes na resolução de problemas são os mais criativos e originais, quer em Matemática quer nas outras áreas, a professora teve dificuldade em responder:

“Ah, isso já não posso dizer, não sei.”

A professora P4 é perentória ao considerar que há alguma correspondência entre ser bom aluno na disciplina de Matemática e ser competente na resolução de problemas. Já quanto à implicação de os alunos competentes na resolução de problemas serem os mais criativos e originais, quer em Matemática, quer nas outras áreas, a professora não soube responder, não tinha a certeza, embora não descartando a hipótese de haver implicação.

Do ponto de vista da professora P5, a correspondência entre ser bom aluno na disciplina de matemática e ser competente na resolução de problemas não é regra:

“Sim e não. Portanto, porque eu tenho miúdos que… não foi o caso do ano passado, mas o outro ano antes, o miúdo era de dois e quando foi isto do Super… do SUB12, o miúdo resolvia, era dos primeiros a resolver. (...) Tenho reparado que os miúdos que têm dificuldade (…) conseguem resolver e arranjam maneiras diferentes e isso. E sim [ser bom aluno em Matemática], implica ser competente na resolução de problemas, pronto, o caso do A6, vejo que, pronto que… depende dos casos."

A professora não considera que os alunos mais competentes na resolução de problemas são os mais criativos e originais, quer em Matemática, quer nas outras áreas:

"(...) Acho que não, que até geralmente os miúdos que são bons a matemática depois nas outras áreas… de EVT, de artes e isso, depois já não são tão… criativos."

Excetuando a professora P2, as demais não consideram os alunos que têm gosto pela resolução de problemas como diferentes da maioria (Questão 21, tabela 79):

	21- Acha que um aluno que tem gosto pela resolução de problemas é diferente da maioria dos alunos ou não? Porquê?
P1	Não. Talvez mais empenhado e trabalhador.
P2	Não sabe explicar. Talvez mais entusiasta, aberto à inovação, flexível.
P3	Não. Pode ser mais curioso, competitivo e persistente.
P4	Iguais aos outros.
P5	*A questão não foi colocada por lapso do entrevistador.*

Tabela 79 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 21.

"Diferente? Acho que não. Quer dizer, diferente nalguns aspetos será. Acho que é um aluno normalmente mais empenhado, mais trabalhador (…) também, [um aluno] pode não ser tão empenhado, mas ser bom a resolver problemas. (...) Normalmente são… parecem… são mais ativos, mais dinâmicos…" (P1)

"Não sei explicar porque eu tenho outros alunos que têm gosto pela resolução de problemas… todos são diferentes. Todos são diferentes. Mas penso que é mais entusiasta [um aluno que gosta de resolver problemas], talvez seja mais entusiasta… Sim, mais aberto à inovação e a ir mais longe. Um aluno que rejeita mais os problemas é um aluno menos flexível ou talvez… gosta mais das coisas rotineiras. Estes alunos [os que gostam de resolver problemas] são mais abertos, mais flexíveis." (P2)

"Não. Pode ser mais curioso. Pode ter um espírito de mais competitividade. De mostrar que é capaz. De não desistir. Ser mais persistente. Porque… também há alunos que até são capazes de resolver, mas têm uma preguiça inicial de interpretação… de interpretar e de… de dar a volta àquilo [ao problema]. Depois de ser dada a primeira… o primeiro empurrão, resolvem na boa, mas precisam do empurrão. (...) É… é, porque quando eles gostam mesmo de resolver, eles encaram aquilo como um enigma, encaram aquilo como um desafio e, portanto, querem mostrar a eles próprios ou… para… que são capazes de fazer [de resolver]. (...) Sem empurrão." (P3)

> “(...) Eu acho que não. Eu acho que são alunos perfeitamente iguais aos outros. Porquê? Não lhe sei dizer. Porque eles têm… têm a sua alegria natural… não sei se são diferentes.” (P4)

Esta questão não foi colocada à professora P5 por lapso do entrevistador.

As professoras consideram não haver uma implicação direta entre ser bom aluno na disciplina de Matemática e ser competente na resolução de problemas (Questão 20, Tabela 78). Também não acreditam, excetuando uma professora, que os alunos mais competentes na resolução de problemas são mais criativos e originais (Questão 20.1, Tabela 78). O mesmo acontece relativamente à implicação de um aluno que gosta de resolver problemas ser diferente da maioria (Questão 21, Tabela 79). Significa, portanto, que a maioria das professoras considera que a capacidade de resolver problemas, a par da criatividade matemática, está ao alcance de qualquer aluno, sendo a primeira um meio para desenvolver a segunda. Neste sentido, as potencialidades matemáticas e criativas dos alunos podem ser desenvolvidas, mesmo naqueles que se pensaria não possuí-las (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009). Sendo assim, os alunos apenas precisam de oportunidades para explorarem a natureza da Matemática e demonstrarem as suas habilidades e capacidades, bem como a sua criatividade (Mann, 2005), quer seja no campo da resolução de problemas ou noutras tarefas matemáticas.

Todas as professoras entrevistadas consideram que a resolução de problemas está ao alcance de todos (questão 22, tabela 80).

	22- Acha que resolver problemas está ao alcance de todos os alunos ou apenas de alguns? Porquê?
P1	Está ao alcance de todos os alunos, desde que trabalhem nesse sentido conjuntamente com os professores.
P2	Está ao alcance de todos os alunos, desde que sejam persistentes.
P3	Teoricamente está ao alcance de todos. Depende de uma sequência de acontecimentos na qual está integrada a família.
P4	Está ao alcance de todos, dado que o grau de dificuldade pode ser adequado aos alunos. É uma capacidade que prospera com a prática e com a experiência.
P5	Está ao alcance de todos. É uma capacidade que deve ser trabalhada para ser bem-sucedida.

Tabela 80 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 22.

Embora a professora P1 ache que resolver problemas está ao alcance de todos os alunos, considera que tem que se trabalhar nesse sentido e que os professores têm um papel muito importante:

> "Eu acho que pode estar ao alcance de todos, mas… mas também tem que se trabalhar nesse sentido. Porque à partida há uns que estão mais despertos, têm mais capacidade a nível de raciocínio, mas o raciocínio também se desenvolve. E daí, desde que nós [professores] estejamos empenhados, também, em fazê-los desenvolver. Predispostos e que também exija algum trabalho do professor e não desistir deles também…"

Do ponto de vista da professora P2, resolver problemas está ao alcance de todos os alunos, desde que sejam persistentes:

> "Está ao alcance de todos os alunos. Porque basta… pensar um pouco, basta ser persistente, não desistir… e devagarinho se vai ao longe, dizia o ditado, que é devagarinho e nunca desistir. E se eles forem devagarinho e nunca desistirem, eles chegam lá, uns mais depressa do que outros, mas todos chegam. Agora, muitas vezes, o problema é que desistem, e depois ficam à espera: eu não sou capaz, eu não consigo. E isso não pode ser, não pode existir essa palavra, não sou capaz. É capaz! Se não é de uma maneira é de outra, se não é tão rápido é mais lento. Arranjar formas distintas de resolver." (P2)

De acordo com a professora P3, resolver problemas está em abstrato ao alcance de todos, ainda que na realidade nem sempre se verifique:

> "Supostamente estaria a… ao alcance de todos, mas a realidade que nós temos não é essa. (...) mas acho que como princípio teórico, acho que sim. Só que acho que há uma sequência de… desde a família, que ou vai facilitar isso ou não… ou não facilita. (...) se eles [os alunos] têm uma estrutura familiar que valorize a aprendizagem, que fomente a aprendizagem, que tenham sido estimulados ao longo da sua vida escolar (...) é óbvio que… que sim, que eles [os alunos] são capazes."

Resolver problemas está ao alcance de todos os alunos para a professora P4:

> "Porque nós [professores] podemos adequar o grau de dificuldade. E é uma coisa que se aprende fazendo. (...) É isso mesmo. Eu digo muitas vezes isso. Como em Educação Física, eles só começam a aguentar a correr (...) 20 minutos, se começarem por [correr] primeiro 5 [minutos] (...) depois 10 [minutos], etc. Como um músculo que eles exercitam. Aqui é a mesma coisa."

Segundo a professora P5, resolver problemas é igualmente acessível a todos:

> "Está ao alcance de todos. Depende do grau de dificuldade (...) tem que ser trabalhado, isto não é assim de repente, chegar e [resolver] (...)."

Mais uma vez, as professoras entrevistadas partilham da mesma perspetiva dos respetivos alunos, também, entrevistados, concordando que resolver problemas está ao alcance de todos os alunos (Questão 22, Tabela 80). As professoras consideram que a capacidade de resolver problemas deve ser nutrida para ser bem-sucedida, dependendo da prática, experiência e persistência dos alunos. Portanto, os alunos precisam de tempo para se envolverem confortavelmente na resolução de problemas, para correrem riscos na busca de uma solução (Bulgar, 2008). O envolvimento significativo, ao longo do tempo, com problemas matemáticos, permite aos alunos construir, encontrar e definir eficazmente esquemas e estratégias importantes de resolução (Powell *et al*, 2009). Principalmente, quando surge um impasse, a necessidade de colocar um problema de lado temporariamente ativa nos alunos a mente inconsciente para fazer associações e conexões que a mente consciente não é capaz de fazer, resultando, muitas vezes, em produtos criativos. São poderosos os benefícios que se obtêm quando os alunos assumem um envolvimento criativo em tarefas de resolução de problemas, dado que isso lhes permite apropriarem-se do que estão a fazer, de forma mais ativa e diligente ao longo de longos períodos de tempo (Treffinger, 2008).

Representações na resolução de problemas

No que diz respeito ao uso de esquemas, desenhos, tabelas, gráficos, figuras, quadros, destaques com cores, etc. (questão 23, ver tabela 81), as professoras têm opiniões largamente favoráveis.

	23- Acha importante, na resolução de problemas usar esquemas, desenhos, tabelas, gráficos, figuras, quadros, destaques com cores, etc.? Porquê?
P1	Tudo. Os alunos são livres, é importante que cheguem à resolução.
P2	Tudo. É importante que os alunos encontrem as suas próprias estratégias de resolução. Quanto mais flexíveis melhor os alunos constroem o conhecimento.
P3	Tudo. Devido ao nível de ensino em que se encontram os alunos, é-lhes difícil transmitirem as resoluções de formas matemáticas estruturadas.
P4	O que for mais adequado. Quantas mais ferramentas um aluno tiver melhor sucedido será.
P5	Tudo. É importante experimentarem várias formas e diferentes recursos.

Tabela 81 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 23

> "Isso é à vontade do freguês. É preciso é que cheguem lá, agora… se eu não pedir 'utilizando um esquema ou recorrendo ao conteúdo tal', pois aí são livres." (P1)

> "Tudo, eles é que decidem o que é que têm que utilizar. Porque eles é que têm que encontrar o seu caminho. Não podem estar formatados, porque senão não há flexibilidade e depois não constroem o conhecimento matemático. É lógico que eles têm que perceber que às vezes através da interação com os outros, que há outros caminhos mais fáceis. Eles veem: se calhar fui aqui pôr estes bonequinhos todos… se

tivesse feito aqui um esquema ou aquela operação teria sido melhor… Mas são eles próprios que têm que chegar a essas conclusões. Eu tenho algumas alunas que querem fazer tudo pelo cálculo e depois perdem-se porque já não sabem qual é a operação. Eles têm é que encontrar as suas estratégias. Portanto valorizo e é muito importante.” (P2)

“A este nível de ensino, acho que é válido todas essas situações, sem ser somente o cálculo. Porque eles estão numa idade em que, provavelmente, têm dificuldade em conseguir transmitir a resolução que construíram mentalmente, para uma forma estruturada matemática.” (P3)

“Aquilo que for mais adequado para o aluno. Porque quantas mais ferramentas, entre aspas, ele tiver, melhor sucedido ele será. Em qualquer situação.” (P4)

“Acho importante, tudo importante. Porque muitas vezes, para as crianças, a matemática é só números. E, portanto, nem pensam que através do esquema, do desenho, também se pode resolver [problemas] e chegar aos resultados. (...) Dar oportunidade de também experimentarem… várias formas, diferentes recursos e diferentes formas de resolver (...).” (P5)

Só a professora P4 é que não valoriza as ilustrações dos seus alunos ainda que informais (Questão 24, tabela 82). A professora P1 costuma valorizar, mas chama a atenção, quando necessário, para a organização. No entanto os seus alunos são livres, desde que cheguem ao que se pretende e faça sentido, “porque facilita também o próprio raciocínio”. Também as professoras P2, P3 e P5 valorizam a apresentação/ilustração das respostas dos seus alunos desde que sejam válidas.

	24- Costuma dar valor á apresentação/ilustração das respostas dos seus alunos mesmo que informais? Como?
P1	Costumo.
P2	Costumo, desde que sejam válidas
P3	Costumo, desde que sejam válidas.
P4	Não costumo.
P5	Costumo. Desde que sejam válidas.

Tabela 82 – Síntese das respostas dadas pelas professoras entrevistas à questão 24

Muitas vezes, os alunos têm experiências e conhecimentos diferentes e como consequência um domínio individual de diferentes representações; este aspeto, quando partilhado, pode ser benéfico para dotar os alunos de uma maior variedade de representações alternativas (Ainsworth, 1999). Os professores entrevistados consideram importante e valorizam o recurso a múltiplas representações, inclusive as construídas pelos próprios alunos, para resolverem os problemas, dado que funcionam de forma complementar e facilitam a comunicação dos esquemas mentais elaborados para encontrar as soluções. Para elas as representações são importantes para a compreensão, operacionalização e comunicação das ideias, conceitos e relações matemáticas, bem como para exprimir abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos (NCTM, 2007; Sajadi, Amiripour & Rostamy-Malkhalifeh, 2013). Aprender a construir e interpretar representações envolve aprender a participar nas práticas complexas de comunicação e raciocínio nas quais as representações são usadas (Pape & Tchoshanov, 2001). Cada forma de representação exprime elementos do raciocínio utilizado, subjacente à escolha da estratégia e à forma da sua comunicação (Preston & Garner, 2003). Quando os alunos têm a oportunidade de escolher os seus próprios modos de representação, torna-se fácil aceder às suas ideias, à sua compreensão sobre conceitos, aos processos de aprendizagem e à natureza de alguma dificuldade (Cerqueira & Vale, 2013). Portanto, verifica-se que as professoras acreditam que as representações lhes permitem reconhecer os modos de interpretação e de raciocínio utilizados pelos alunos, para poderem provocar a discussão de ideias matemáticas (Clements, 2004). Desta forma, pode-se inferir que as professoras privilegiam a criação e o uso de representações para registar e comunicar ideias, bem como o seu uso de um modo flexível, considerando-as aspetos importantes, nomeadamente, no âmbito da resolução de problemas (Cerqueira & Vale, 2013).

Síntese

As entrevistas dadas por estas cinco professoras revelaram muitas convergências entre pontos de vista mas também algumas opiniões distintas em relação a questões particulares. Por exemplo, nem todas as professoras atribuem a mesma função à resolução de problemas no currículo de Matemática, sendo, para algumas, mais importante na introdução de conceitos e, para outras, mais útil na aplicação de conteúdos aprendidos anteriormente. Todas parecem, porém, reconhecer a resolução de problemas como uma capacidade transversal a desenvolver e um objetivo a alcançar na Matemática escolar.

Em geral, valorizam a liberdade a dar aos alunos e a sua autonomia, contribuindo com pistas e dicas e ajudando na interpretação, quando eles necessitam de ajuda para avançarem. Acham que a interpretação e, por outro lado, a comunicação matemática constituem as principais dificuldades que os alunos denotam na resolução de problemas.

Todas dão muito relevo ao raciocínio e ao processo de resolução utilizado para chegar à solução, considerando que este é mais importante do que a própria resposta correta. Mostram, assim, saber aproveitar o erro como meio para a aprendizagem e dão aos alunos segurança para que estes se sintam confortáveis em arriscar ideias, sugestões e caminhos próprios. Sentem-se, geralmente, muito satisfeitas quando os alunos apresentam resoluções inesperadas e promovem a discussão na turma das várias alternativas provenientes do trabalho dos alunos. Associam a criatividade à ideia de inovação, novidade, processo diferente do comum, único, inesperado. Em grande medida, fazem uma certa correspondência entre criatividade e originalidade, embora admitam achar os dois conceitos algo distintos. Curiosamente, não associam a criatividade a aspetos de fluência de conhecimento nem a flexibilidade representacional. Mais tarde, contudo, ao serem questionadas acerca da utilização de múltiplas representações matemáticas na resolução de problemas, referem que isso é fomentado nas suas práticas e que os seus alunos são encorajados a usar várias representações e a lançar mão das que melhor se ajustem aos seus processos de raciocínio e ao seu conhecimento matemático. Já no que se refere ao conhecimento matemático, e nas questões que incidiram diretamente sobre a sua influência na resolução de problemas, ao contrário do que foi a visão dos alunos, as professoras mostraram não lhe atribuir um peso absoluto, justificando que os alunos conseguem encontrar processos próprios para obter a solução que não requerem conhecimento matemático anterior.

Estas professoras destacaram o desafio, a competitividade e a vontade de superação, bem como o gosto pela resolução de problemas e pela Matemática, como elementos centrais na motivação dos alunos para a participação em campeonatos como o SUB12. Mostraram tendência para qualificar os problemas do SUB12 como interessantes, ainda que destacando em grau de dificuldade razoável alguns desses problemas.

Tal como os alunos entrevistados, acreditam que a resolução de problemas está ao alcance de todos, ainda que nomeiem algumas caraterísticas como sendo mais típicas dos bons resolvedores de problemas, designadamente: persistência, curiosidade, abertura de espírito, perspicácia, inteligência. De uma forma geral, consideram a resolução de problemas promovida pelo campeonato como uma oportunidade para os alunos aprenderem mais, revelarem e desenvolverem as suas capacidades e adquirirem autoconfiança, contrariando uma visão negativa bem conhecida da Matemática.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

5.1. Introdução

Este capítulo encontra-se organizado em quatro secções, sendo que na primeira e na segunda são apresentadas as principais conclusões deste trabalho, em consonância com as questões de investigação, na terceira são tecidas algumas considerações finais e na quarta apontam-se limitações e sugestões para futuras investigações. Relembra-se que neste estudo se procurou detetar, explorar e descrever o fenómeno da criatividade matemática manifestado nas resoluções construídas por alunos do 2.º ciclo do ensino básico envolvidos na fase de apuramento do Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática SUB12, que se apresenta como um contexto competitivo, mas assumidamente inclusivo. No sentido de alcançar o objetivo pretendido foram levantadas, como vetores estruturais desta investigação, as seguintes questões:

1. *Criatividade matemática evidenciada nas resoluções enquanto produtos criativos:*

   Como se manifesta a criatividade dos alunos nas resoluções dos problemas do SUB12, em termos dos indicadores estabelecidos para a sua avaliação?

   1.1. Que evidências distinguem as resoluções criativas dos participantes?

   1.2. Que relação pode ser encontrada entre as representações utilizadas (flexibilidade representacional) e os conceitos e procedimentos matemáticos (fluência de conhecimento) mobilizados nas resoluções?

   1.3. Que tipo de criatividade matemática emerge da interação entre os indicadores estabelecidos para descrever esse fenómeno, no contexto do SUB12?

2. *O SUB12 e a resolução de problemas como oportunidades para a criatividade matemática enquanto processo:*

   Do ponto de vista dos alunos entusiastas da resolução de problemas e respetivos professores, qual a influência do SUB12 sobre a aprendizagem e a criatividade matemática?

   2.1. O que pensam os alunos participantes e os respetivos professores acerca da criatividade na resolução de problemas de Matemática?

2.2. O que pensam os alunos participantes e os respetivos professores acerca dos reflexos dos conhecimentos e capacidades em Matemática sobre a criatividade matemática?
2.3. Que oportunidades surgem com a participação no SUB12 para a manifestação da criatividade matemática, do ponto de vista dos alunos e dos seus professores?

O primeiro conjunto de questões foi abordado com base na construção e aplicação de um referencial de análise da criatividade matemática que procurou relacionar os parâmetros originalidade, fluência e flexibilidade, já usados noutros estudos fundados numa perspetiva psicométrica, e que neste caso foram enquadrados conceptualmente na atividade de resolução de problemas matemáticos realizada por crianças com aptidões matemáticas não necessariamente excecionais. Desta forma, à luz do referencial de análise proposto, foi examinada uma amostra intencional de produtos da atividade de resolução de problemas não-rotineiros constituída por cinco conjuntos de 10 resoluções, recolhidas e selecionadas de três fases de apuramento do campeonato SUB12, referentes às edições anuais de 2012/2013 (10 + 10 resoluções), 2011/2012 (10 + 10 resoluções) e 2010/2011 (10 resoluções). A presidir a esta seleção das resoluções estiveram alguns cuidados que importa enunciar. Por um lado, foi dada importância à amplitude temporal que é abrangida pela recolha das resoluções analisadas. Por outro lado, foi considerado igualmente aconselhável um número substancial de resoluções – cinquenta no total – apesar da natureza qualitativa do estudo e da análise eminentemente interpretativa que é feita destes documentos. Finalmente, foram contemplados na amostra diferentes tipos de problemas matemáticos quanto à natureza dos tópicos matemáticos em que se enquadram e ao tipo de raciocínio que envolvem. As referidas preocupações visaram atenuar, tanto quanto possível, eventuais reservas na análise dos dados, decorrentes de fatores incontroláveis, tais como: uma determinada edição do campeonato primar pela exuberância das resoluções enviadas ou pela maior aptidão e potencial criativo dos concorrentes desse ano, uma vez que os participantes variam de edição para edição (há alguma permanência no 6.º ano dos alunos que entram no 5.º ano); a possibilidade de ajuda (por exemplo, de pais e professores) que está prevista pela organização do campeonato constituir um elemento de adulteração da criatividade dos jovens participantes; e um certo tipo de problemas matemáticos ter um maior poder na realização e demonstração da criatividade matemática, em comparação com outros. Em suma, a distribuição temporal – três anos letivos consecutivos –, a quantidade apreciável de resoluções consideradas – atenuando a probabilidade de concentração de hipotéticas ajudas –, e a variedade dos problemas envolvidos – visando afastar a hipótese de problemas mais favoráveis do que outros –, procuraram de forma conjugada contribuir para uma visão suficientemente imparcial da criatividade matemática manifestada nas resoluções obtidas no campeonato SUB12.

Com o segundo conjunto de questões, interessou conhecer o ponto de vista de alguns participantes e dos respetivos professores de Matemática acerca do modo como veem a criatividade na resolução de problemas, na sua relação com a originalidade, o conhecimento matemático e a capacidade de representação de ideias matemáticas. Foi igualmente importante ouvir as suas apreciações acerca das potencialidades do SUB12 como contexto extraescolar para o desenvolvimento de capacidades transversais (designadamente a resolução de problemas, a sua expressão e comunicação e as possíveis abordagens para chegar à solução), bem como o seu contributo para fomentar a criatividade matemática. Para tal, no decurso da edição de 2009/2010 do SUB12, foram efetuadas entrevistas de caráter estruturado a 6 alunos participantes e aos respetivos professores de Matemática, o que correspondeu a 5 professoras entrevistadas.

As entrevistas obedeceram a guiões elaborados especificamente para o efeito, tendo sido produzido um guião para os alunos e um guião para os professores. Os dois guiões, embora não sendo equivalentes nas perguntas formuladas, procuraram contemplar itens semelhantes entre os dois grupos de entrevistados. Deste conjunto de entrevistas resultaram dados importantes para complementar a visão da criatividade matemática evidenciada nos produtos, uma vez que permitiram ouvir da voz dos alunos e dos seus professores explicações que estes oferecem para o fenómeno da criatividade matemática enquanto parte integrante do processo de criação de ideias e resultados matemáticos alinhados com o nível etário e a formação, ainda elementar, dos alunos em matemática.

Relembra-se que neste estudo foi adotada uma metodologia de natureza qualitativa, numa perspetiva claramente interpretativa e fortemente centrado na análise de conteúdo, tanto de dados de natureza documental como de inquirição, através do contacto direto com alunos e professores visando recolher as suas opiniões acerca do fenómeno em estudo.

5.2. Criatividade matemática evidenciada nas resoluções enquanto produtos criativos

Como referimos anteriormente, o objetivo do presente estudo – descrever a criatividade matemática dos alunos do 5.º e 6.º ano na resolução de problemas e de que modo esta é estimulada pela sua participação numa competição de resolução de problemas de matemática – afasta-se deliberadamente da relação entre a criatividade matemática e os indivíduos especialmente dotados e talentosos em Matemática e portanto da perspetiva que estabelece uma associação entre talento e criatividade matemática. Pelo contrário, interessou neste estudo perceber a criatividade matemática ao alcance de todos e reconhecer o potencial presente nas produções criativas com c-pequeno (Beghetto & Kaufman, 2009). Este posicionamento permite-nos encarar a criatividade matemática das crianças em idade escolar como naturalmente patente nas suas resoluções de problemas matemáticos. Portanto, a criatividade pode ser reconhecida e é possível de ser descrita de forma suficientemente precisa, se for entendida como alcançável e vista como relativa ao contexto em que se manifesta. Para tal, recorreu-se a um modelo de análise da criatividade dos produtos que permitiu analisar cinco conjuntos de soluções construídas por jovens alunos de idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos, a fim de investigar o fenómeno da criatividade matemática manifestado na resolução de problemas matemáticos, para além da sala de aula, no contexto competitivo do SUB12. Assim, foi construído, testado e pilotado, sendo finalmente aplicado e operacionalizado, um referencial de análise destinado à deteção de evidências da criatividade nas resoluções produzidas por diferentes alunos (dos dois níveis de escolaridade do 2.º ciclo) envolvidos em sucessivas fases de apuramento do SUB12. Note-se que, desde a sua conceção até ao estado atual, o referencial de análise usado neste estudo foi alvo de reformulações depois de testado em diferentes momentos do seu processo de construção, tendo gerado resultados que foram publicados a nível nacional e internacional e contribuíram para a notória evolução do instrumento. A versão atual permitiu estudar, descrever e apresentar de forma qualitativa e fundamentalmente essencialmente descritiva o fenómeno da criatividade matemática no contexto do SUB12, revelando consistência, funcionalidade, viabilidade e fiabilidade como instrumento de análise de dados, em consonância com o propósito deste estudo.

Tendo em conta o contexto e as questões mais específicas do estudo, o primeiro critério que presidiu à escolha das resoluções foi o de garantir que todas aquelas que constaram da amostra selecionada eram originais, tendo sido distinguidas e selecionadas em função da sua singularidade (Starko, 2010). Como se sabe, o conceito de originalidade ou novidade tem por base a noção de comparação com aquilo que é de alguma forma congénere ou equiparável. Só assim é possível reconhecer algo que ainda não foi criado ou que é novo e diferente de tudo o que existe dentro de uma certa categoria de produtos. No caso dos dados a que nos referimos, para cada um dos 5 problemas que foram considerados, a primeira operação efetuada foi a de triagem de todas as resoluções submetidas durante o campeonato a cada um desses problemas. Qualquer desses lotes incluiu um número variável de resoluções que depende naturalmente do número de alunos em prova no momento em que o problema foi lançado. Cabe, no entanto, registar que o SUB12 recebe, para cada problema, um volume de respostas geralmente muito acima das 500 resoluções.

Sendo assim, e independentemente da sua expressão, a originalidade das resoluções foi tida como um indicador da aptidão para gerar ideias incomuns que permitiram perceber e definir os problemas de forma diferente e de uma capacidade de expressão própria para representar o conhecimento mobilizado de modo a produzir resoluções únicas (Irish National Teachers' Organisation, 2009; Rostan, 2010). Portanto, em cada problema, no universo das resoluções que se distinguiram pela sua originalidade, embora seja possível observar alguns pontos comuns entre elas, de uma forma geral foram consideradas resoluções invulgares por revelarem estratégias e abordagens ou formas de raciocínio ou ainda modos de representação e comunicação distintos entre si e dos demais no âmbito do campeonato.

Importa, portanto, sublinhar que a originalidade foi o pilar sobre o qual se estruturou, desde o início, toda a análise das resoluções. Dito de outro modo, partiu-se da originalidade como grande critério de filtragem das resoluções a analisar (um conjunto de dez para cada problema dos cinco problemas assinalados) para nesse grupo limitado de resoluções fazer uma análise fina em torno das três dimensões contempladas no referencial de análise: Originalidade, Fluência de Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional. Esta espécie de primazia da originalidade no escrutínio da criatividade não somente é suportada por uma abordagem teórica do conceito que o associa claramente à inovação, à invenção e à criação de algo novo e incomum (Gomez, 2007; Leikin, 2013; Sriraman, 2008), como é também espelhada pelos alunos e professores entrevistados que, à primeira vista, percebem a criatividade como muito semelhante à originalidade.

Apesar de se assumir um certo ascendente da originalidade na descrição e caraterização da criatividade presente nos dados, adota-se igualmente o ponto de vista da utilidade do produto criativo (Runco & Jaeger, 2012). Isto leva-nos a ter em conta a área de conhecimento na qual se está a avaliar a criatividade – a resolução de problemas matemáticos – e a definir como condição *sine qua non* que a criatividade matemática manifestada tenha como contrapartida uma solução correta e matematicamente válida, compatível com o grau de experiência matemática dos alunos.

5.2.1. Relação entre originalidade, fluência do conhecimento e flexibilidade representacional na criatividade matemática

De acordo com os dados emergentes da operacionalização do referencial de análise, nomeadamente por meio da atribuição de uma escala ordinal de 3 níveis (0, ½, 1), nos descritores associados à Originalidade, à Fluência do Conhecimento Matemático e à Flexibilidade Representacional, obteve-se uma variabilidade da qual se poderá concluir que: i) a criatividade matemática manifestada nas resoluções analisadas apresenta um caráter heterogéneo, o que parece ser compatível com o contexto de uma competição inclusiva, que procura atrair e abranger uma larga diversidade de jovens alunos, com diferentes capacidades de resolução de problemas e também níveis de desempenho académico na disciplina de matemática (são portanto plausíveis diversos graus de fluência e de flexibilidade de representação em matemática); ii) a heterogeneidade da criatividade nas resoluções analisadas não decorre de uma grande dispersão nas medidas obtidas em cada uma das dimensões; pelo contrário, dentro da diversidade há uma relativa continuidade que pode ser observada nos gráficos paralelepipédicos; iii) a criatividade matemática traduzida pela operacionalização do referencial de análise é visivelmente sustentada pelas 3 dimensões contempladas e pela sua influência combinada, não se verificando casos extremos de preponderância ou desaparecimento de uma das dimensões (isto é, paralelepípedos "aplanados"), o que parece ser uma forte evidência de uma criatividade matemática do tipo mini-c, própria de contextos de aprendizagem (Beghetto & Kaufman, 2007; Beghetto, Kaufman, Hegarty, Hammond & Wilcox-Herzog, 2012).

Notamos que a flexibilidade, que aqui foi tratada em termos de flexibilidade representacional, esteve aliada em muitas das resoluções à dimensão da originalidade, pelo que a sua conjugação parece ter constituído uma importante fonte de alimentação da criatividade matemática observada na resolução de problemas do SUB12. Com efeito, as resoluções em que a medida obtida para a originalidade reflete a presença de todos ou quase todos os descritores, mostram igualmente tendência para serem reveladoras de elevada flexibilidade. No total da amostra, apenas 4 resoluções fogem à regra: S4A10, S10B9 e S8B10 – maior Originalidade e menor Flexibilidade Representacional; e S7C10 – menor Originalidade maior Flexibilidade Representacional. No caso das resoluções S4A10, S10B9 e S8B10, a frágil concretização das representações mobilizadas constituiu um obstáculo a uma maior expressão da criatividade matemática, confirmando que a flexibilidade representacional é uma caraterística determinante para a afirmação de resoluções simultaneamente incomuns, significativas e úteis (Silver, 1997). Corroborando o que é defendido por vários autores e está bem presente na literatura sobre a criatividade, os dados apontam para que a originalidade seja um elemento estrutural da criatividade ainda que não seja, por si só, determinante para caraterizar uma resolução com forte expressão e medida criativa (Beghetto, 2007; Runco, 2003; Runco, 2006; Runco, 2004a; Runco & Jaeger, 2012). Em particular, a flexibilidade representacional assume um importante papel na volumetria da criatividade matemática, mostrando ser igualmente muito relevante na sua descrição no contexto empírico deste estudo (Runco, 2003).

Concluímos pois, das análises efetuadas, que não basta que uma resolução seja diferente para que se possa considerar criativa; desde logo, também terá de ser eficaz e útil (Beghetto, 2007; Runco, 2003; Runco, 2006; Runco, 2004; Runco & Jaeger, 2012). Aspetos como eficácia, oportunidade, adequação e utilidade estratégica de formas e sistemas de representação matemática, bem como a sua utilização e combinação perspicaz foram bastante evidenciados nas resoluções examinadas. A título de exemplo, observámos como o recurso a diagramas (ex. diagrama de *Venn*, diagrama de *Caroll*), a tabelas (ex. tabelas de variação, tabelas de dupla entrada) e a esquemas pictóricos (ex. imagens, ícones, uso de cores, gráficos), não apenas marcaram a diferença mas marcaram-na através da sua eficácia em apoiar estrategicamente o processo de resolução dos problemas e a obtenção e a expressão das soluções. Portanto, a originalidade surge visivelmente unida à flexibilidade representacional, garantindo não apenas formas de resolver invulgares e incomuns, mas também astutas e frequentemente poderosas, no sentido em que correspondem a construções e descobertas matemáticas significativas e potenciadoras de novas aprendizagens. Para além da busca da originalidade, a flexibilidade também é responsável por estimular o pensamento divergente, indispensável às manifestações dos processos mentais de ordem superior (Vale, 2011), que neste enquadramento empírico implicou a capacidade de representar adequadamente o conhecimento mobilizado para resolver os problemas.

O mesmo nítido emparelhamento parece não acontecer com a Fluência do Conhecimento Matemático em relação à Originalidade ou à Flexibilidade Representacional. De facto, no geral, a maior ou menor pontuação gerada pelos descritores da Fluência de Conhecimento Matemático não parece estar diretamente agregada a um maior ou menor peso dos descritores afetos à Originalidade e à Flexibilidade Representacional. Destes resultados emerge a conclusão de que a fluência não detém um papel tão determinante quanto o da flexibilidade representacional ao nível da expressividade e criatividade das resoluções. Não obstante, foi igualmente constatado que o domínio do conhecimento matemático e a sua execução eficiente e perspicaz é importante para a manifestação da criatividade na resolução de problemas matemáticos. Obviamente que sem um certo conhecimento no domínio da matemática – quer de conceitos quer de métodos e processos – seria difícil abordar com sucesso os problemas de matemática dos quais resultaram as resoluções atrás analisadas. Isto vem ao encontro da ideia defendida por vários teóricos de que os indivíduos que revelam um grande domínio de conhecimento matemático têm maior capacidade para o usar de modo a gerar conhecimento novo e para serem matematicamente criativos (Sternberg, 2008).

Neste contexto, e de acordo com os resultados obtidos, retiramos evidências de que a presença da Originalidade em resoluções matematicamente criativas parece estar bastante associada à Flexibilidade Representacional e não tanto à Fluência do Conhecimento Matemático, ainda que tal constatação não queira significar uma variação correlacionada entre as dimensões da criatividade. Em conclusão, parece possível afirmar que o grau de criatividade das resoluções decorre de uma forte conjugação entre Originalidade e Flexibilidade Representacional, em termos da capacidade de ativar esquemas mentais inovadores mas também viáveis para atacar os problemas e os resolver através de estratégias adequadas de resolução. Nomeadamente, a combinação entre representações simbólicas, icónicas, verbais, esquemáticas e outro tipo de inscrições permitiram aos alunos extrair, organizar e tratar informação, por meio de estratégias interessantes e próprias de quem as produziu (Preston & Garner, 2003). A flexibilidade de representação matemática verificada nas resoluções da amostra destacou-se, entre outros parâmetros, pela adequação das formas de representação mobilizadas ao problema em causa, comprovando a sua centralidade na resolução de problemas, como é amplamente reconhecido pela investigação (Ainsworth, 1999; Benko & Maher, 2006). Também é possível notar que a Fluência do Conhecimento Matemático, traduzida pela ativação, mobilização e aplicação de conceitos e procedimentos potencialmente úteis para lidar com os problemas, bem como a capacidade de expressar claramente o raciocínio matemático, teve reflexos evidentes no nível de criatividade. Na verdade, a criatividade não se pode reduzir à Originalidade nem tão pouco à Flexibilidade Representacional, ainda que estas, sobretudo de forma conjugada, emprestem um grande contributo para a medida total da criatividade; não obstante a sua relevância na criatividade matemática, estas duas dimensões não são suficientes para qualificar um produto de criativo. Portanto a manifestação da criatividade, neste contexto, incluiu a mobilização, execução e estruturação do conhecimento matemático, isto é, uma proficiência matemática prévia (Leikin, 2013; NCTM, 2014; Mayer, 2006), a par da forma como esse conhecimento foi representado em consonância com os dados, condições e objetivo de cada problema.

Reconhecemos, deste modo, que a fluência foi fundamental para a mobilização de conhecimento matemático importante para compreender e resolver os problemas, tal como a flexibilidade foi responsável pela sua materialização em representações externas pertinentes e úteis no processo de resolução e comunicação clara do raciocínio; ambas tiveram um papel significativo para a manifestação da criatividade matemática. Tudo leva a concluir, no entanto, com base nos dados analisados, que a criatividade matemática na resolução de problemas se manifesta mais notoriamente por via da fluência representacional e da sua forte associação com a originalidade das resoluções. Em contrapartida, a legitimação da criatividade matemática presente nas resoluções parece ser garantida pela Fluência do Conhecimento Matemático. Logo, a criatividade mini-c manifestada no conjunto das resoluções escrutinadas a partir do referencial de análise, foi caraterizada por produtos únicos que adquirem significado matemático devido ao conhecimento matemático mobilizado e posto em ação (não necessariamente conhecimento matemático formal e abstrato) e ganham expressividade pelas representações matemáticas usadas que refletem e tornam clara a exteriorização do processo de resolução. Neste enquadramento, o ato criativo envolvido no Campeonato de Resolução de Problemas SUB12, que levou à construção de resoluções distintas, indica-nos que a dimensão da Originalidade não é indissociável da Fluência de

Conhecimento Matemático e, particularmente, da Flexibilidade Representacional. Ambos os indicadores são importantes para a interpretação e compreensão dos problemas, bem como para a construção e representação de raciocínios matemáticos interessantes, eficazes e novos. O facto de se verificar que a Flexibilidade Representacional empresta maior fôlego à criatividade do que a Fluência de Conhecimento pode ter uma explicação que se apoia no tipo de criatividade matemática de que estamos a tratar: a criatividade na resolução de problemas matemáticos demonstrada por crianças com uma ainda breve formação matemática escolar. Na verdade, uma maior fluência de conhecimento matemático, ou seja, o domínio de mais ferramentas e mais avançadas, de procedimentos mais poderosos, de conceitos e ideias mais eficientes para modelar determinadas situações (por exemplo, o cálculo com frações, o cálculo algébrico, ou o cálculo diferencial) poderão diminuir a dimensão da originalidade na resolução de problemas, na medida em que certos problemas passam a ser triviais ou quase triviais à luz desse conhecimento prévio. Por exemplo, o problema do "vírus do computador" terá uma resolução a que poderemos chamar de *standard* – e portanto pouco original – para alguém que domine o cálculo com números fracionários e que traduza o problema por uma expressão numérica conducente ao resultado, mediante a execução das operações adequadas. Face à fluência expectável de alunos do 2.º ciclo do ensino básico, a mesma resolução *standard* será vista como reveladora de um elevado nível de proficiência e será, porventura, menos frequente e portanto mais original.

5.2.2. Relevância da fluência do conhecimento matemático na criatividade

O domínio do conhecimento matemático aparente nas resoluções dos alunos mostrou-se importante para relacionar e organizar a informação disponibilizada nos enunciados e determinou em que medida essa informação foi explorada para que se atingissem as soluções corretas, acentuando a ideia de que ser criativo na resolução de problemas pressupõe, antes de tudo, ser capaz de os resolver (Sheffield, 2009). Sendo a fluência parte integrante da proficiência em matemática, foi interpretada e conceptualizada, neste contexto de resolução de problemas, como a utilização de conceitos e procedimentos matemáticos, com eficiência e precisão, para conduzir uma abordagem matemática a uma determinada situação (NCTM, 2014). A evidência de fluência matemática, com maior ou menor expressão, foi confirmada em todas as resoluções analisadas, nalgumas com elevada incidência, muitas vezes observável através da aparente facilidade de resolução, da simplicidade e da capacidade de generalização, e do controlo sobre os processos escolhidos; simultaneamente, a precisão é demonstrada através das relações estabelecidas entre os dados mais importantes dos problemas e da estruturação de etapas que revelam o caminho seguido para alcançar os resultados (NCTM, 2014; Russell, 2000). Qualquer uma das resoluções escolhidas é eficiente, ainda que algumas tenham sido arquitetadas de modo mais exaustivo do que outras, ou seja, de forma menos fluente nuns casos do que noutros. Um exemplo desta caraterística exaustiva pode ser encontrado na resolução S5B10, que mostra um esquema em árvore para representar as sucessivas gerações, exibindo, um a um, todos os membros de todas as gerações. Neste contexto, a exaustividade foi encarada como uma caraterística das resoluções que traduz uma menor Fluência do Conhecimento Matemático, sendo pelo contrário maior a sua expressão nos casos em que as soluções foram obtidas de formas simples, mais sintéticas e mais gerais. Além disso, esta dimensão da criatividade, também se revelou pela seleção de estratégias apropriadas sustentadas por raciocínios matemáticos e que, particularmente, os problemas requeriam para serem resolvidos (NCTM, 2014). Os raciocínios desenvolvidos demonstraram a aptidão dos alunos para compreender as questões colocadas nos enunciados e a competência para lhes dar resposta (OCDE, 2013) na arte de combinar esquemas de pensamento com processos de resolução que permitem explorar a informação disponibilizada nos enunciados dos problemas e abstrair para além do problema dado (Freiman, 2006; Krutetskii, 1976; Miller, 1990, citado em Freiman, 2009). Poderemos encontrar um exemplo que evidencia este tipo de fluência na resolução S7A7, em que a tabela de dupla entrada é estrategicamente usada para representar os insucessos e sucessos no emparelhamento das chaves e cadeados mas, além disso, apoia a descoberta de uma fórmula mais geral que leva a obter o número de tentativas, conhecendo simplesmente o número de chaves ou cadeados.

Assim, uma clara Fluência do Conhecimento Matemático, traduzida pela ativação e uso de conceitos e procedimentos matemáticos potencialmente úteis, estrategicamente combinados para obter a solução, bem como a capacidade de expressar claramente o raciocínio matemático, teve reflexos evidentes no nível de criatividade. De um modo geral, as resoluções refletiram pensamentos criativos, munidos de fluência e precisão matemática para resolver os problemas de forma original no contexto desta investigação (Aizikovitsh-Udi, 2013). Com efeito, sem um certo nível de conhecimento a expressão da criatividade torna-se menos consistente (Sriraman, 2008) e, pese embora a sua originalidade, o domínio do conhecimento matemático e da forma como este é representado reflete-se na criatividade matemática (Runco & Jaeger, 2012; Leikin, 2009b; Feldhusen, 2006). Veja-se, a título de exemplo, a solução S10A10, em que o processo de representação dos conjuntos de pessoas correspondentes às várias hipóteses de bebidas tomadas correspondeu a um processo original, suportado por formas icónicas de organização e implementação do raciocínio, mas também pouco transparente e difícil de transferir para outros exemplos análogos. Sendo assim, a fluência em termos de conhecimento matemático parece ter constituído uma importante base para a alimentação da criatividade matemática observada, dado que atribuiu significado à singularidade das resoluções e a flexibilidade conferiu-lhe a respetiva utilidade a partir da mobilização das representações adequadas. Assim sendo, a competência representacional esteve subjacente ao conhecimento que não foi apenas armazenado, mas mentalmente representado e organizado (ligado e estruturado) de maneira a facilitar a sua recuperação e a aplicação adequada (NCR, 2001). Nomeadamente, o conhecimento adquirido conjugado com a liberdade para pensar profundamente e construir representações, permitiu explorar com detalhe as representações mobilizadas e estabelecer conexões significativas, de modo a que os problemas fizessem sentido (Benko & Maher, 2006). No entanto, ainda que a Fluência seja responsável por garantir a aplicação adequada e interessante do conhecimento matemático, é importante que esteja associada à Originalidade e à Flexibilidade Representacional (Guerra, 2007). Vejam-se como exemplos as resoluções S7B9, S6B10 e S1C10, qualquer uma delas exibindo uma clara flexibilidade representacional (em particular, no uso de esquemas pictóricos, uso de gráficos circulares ou uso de processos numéricos realizados com perspicácia) que contribuiu para as tornar distintas e incomuns, e portanto originais, ao mesmo tempo que nelas se reconhece fluência de conhecimento matemático, ao nível dos conceitos, dos significados e processos e da sua aplicação ao problema específico.

5.2.3. Relevância da flexibilidade representacional na criatividade

A arte de representar denunciou uma Flexibilidade Representacional individualizada e facilmente detetável em cada resolução, adaptada e ajustada ao propósito de resolver os problemas, exprimindo e revelando os raciocínios efetuados e permitindo, ao mesmo tempo, expô-los de forma clara. O tipo de representações reveladas é genericamente coerente com abordagens adequadas para resolver os problemas propostos, o que significa saber escolher as representações mais eficazes

(Starko, 2009). O caso do recurso a tabelas de dupla entrada no problema das chaves e cadeados ou o uso de retângulos divididos em partes iguais no caso do problema do vírus do computador ou ainda o diagrama de *Venn* no problema das bebidas no pequeno-almoço, e o caso do diagrama em árvore no problema das gerações são bem ilustrativos do papel estratégico de determinadas formas de representação matemática no sucesso das abordagens adotadas. Portanto, a flexibilidade reflete a adequação e combinação das representações matemáticas e não matemáticas utilizadas, provenientes de diferentes sistemas de representação conectados (pictórico, simbólico, numérico, linguagem natural,...), que permitem registar e relacionar os dados e condições das situações problemáticas com o conhecimento matemático relevante. Assim, a flexibilidade de representação começa pela adequação das representações mobilizadas, que demonstram simultaneamente um domínio de conhecimento matemático para resolver os diversos problemas (Ainsworth, 1999; Benko & Maher, 2006). Ao nível da criatividade matemática, a forma como as representações foram usadas em cada resolução para exprimir o pensamento matemático, constituiu uma importante evidência de Flexibilidade Representacional com forte implicação na Originalidade dos produtos. Também a comunicação matemática em cada resolução, com claros reflexos na originalidade, expôs processos de raciocínio que ganharam corpo através da combinação de representações simbólicas, icónicas e visuais, muitas vezes apoiadas e complementadas pelo uso de linguagem natural. Um caso exemplificativo é o da resolução S3A10, no problema das alternativas de bebidas, um problema que envolve relacionar conjuntos e formas de obter subconjuntos e interseções. Esta resolução tira proveito de um esquema bem elaborado que tem por base um diagrama de *Venn* mas introduz um elemento icónico que acentua a nitidez do raciocínio, conjugado com a capacidade de explicar por linguagem corrente as ideias, os conceitos e os processos levados a cabo para chegar à solução. Neste processo, as representações utilizadas foram responsáveis por documentar formas de raciocínio inovadoras ao nível da exploração e execução do conhecimento matemático utilizado para construir cada resolução. Logo, a Flexibilidade Representacional destacou-se, particularmente, pela capacidade de lidar com representações diversas e eficazes e de estabelecer conexões entre elas. Esta dimensão da criatividade foi facilmente reconhecida através da presença das diferentes representações usadas, indicando que a Flexibilidade Representacional é importante para resoluções de problemas matemáticos únicos que envolvem capacidade imaginativa e inventiva (Ainsworth, 1999; Benko & Maher, 2006). Além disso, as formas de representação escolhidas e transportadas para o contexto de cada problema geram, também, resoluções simples e claras com um certo sentido estético, o que constitui um traço de criatividade matemática (Leikin, 2013). O caso da resolução S7A10 é paradigmático da ocorrência de tal clareza e simplicidade. Neste caso, a forma de representação esquemática que é relativamente inesperada e, portanto, inovadora, alia-se à simplicidade dos cálculos sugeridos pelo esquema, resultando numa resolução esteticamente apelativa e convincente. Em geral, parece resultar da análise apresentada que aquilo que é novo, único e diferente, em cada uma das resoluções representadas, não se resume a simples detalhes superficiais mas reveste-se de sentido matemático e está associado à capacidade de criar, reinventar e combinar cada forma de representação, isto é, à Flexibilidade Representacional. Em resumo, a Flexibilidade presente na criatividade matemática destacou-se pelas escolhas adequadas para representar soluções corretas dos problemas em mão (Meyer, 2000; Nistal, Dooren, Clarebout, Elen & Verschaffel, 2009), sem que isso tenha significado rigidez de pensamento matemático ou esquemas mentais previamente formatados (Haylock, 1997).

5.2.4. Síntese geral

Em síntese, a originalidade indica-nos resoluções construídas com base em ideias novas, únicas e valiosas para enfrentar os problemas, caraterizando formas singulares de pensar presentes nas resoluções construídas (Guerra, 2007). Ainda que a criatividade se tenha manifestado através de produtos únicos distinguidos pela Originalidade que pode ser entendida como o seu principal componente (Leikin, 2013), a Fluência do Conhecimento Matemático e a Flexibilidade de Representação também tiveram um papel importante, dado que lhe conferiram significado e utilidade. Ainda que a Originalidade tenha sido determinante para que as resoluções fossem consideradas únicas ou invulgares, a criatividade matemática manifestada nos produtos analisados foi sustentada pelo conhecimento matemático mobilizado e pela originalidade da sua representação. Portanto, o pensamento criativo subjacente pressupõe fluência e precisão de conhecimento matemático na resolução de tarefas não rotineiras, como no caso dos problemas analisados (Aizikovitsh-Udi, 2013). Assim, a criatividade manifestada neste conjunto de resoluções é caraterizada pela relação dinâmica estabelecida entre as três dimensões que foram usadas para a caraterizar no contexto deste estudo e que constam do referencial de análise proposto. Os dados indicam que a manifestação da criatividade pode ser descrita e diferenciada pelas dimensões Originalidade, Fluência do Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional, cuja dinâmica de combinação é determinante para a diversidade de resoluções matematicamente criativas à luz do saber matemático que é próprio dos alunos.

A liberdade permitida, quer no desenvolvimento do raciocínio matemático quer na comunicação matemática, parece ter tido influência na promoção de resoluções matemáticas pessoais, inventivas e distintivas. Este fenómeno está em sintonia com as caraterísticas do Campeonato de Matemática SUB12, uma vez que promove a liberdade de utilização de processos e recursos próprios. Além disso, a liberdade de comunicação matemática dada aos participantes trouxe a comunicação para primeiro plano, acentuando a importância de representação de ideias, conceitos e processos matemáticos envolvidos na resolução. Sugere-se, assim, que o contexto competitivo do SUB12 terá sido provavelmente um fator que estimulou a procura de formas eficazes e simultaneamente interessantes de comunicar as resoluções, contribuindo para a riqueza das representações produzidas e, consequentemente, para o desenvolvimento da criatividade matemática (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). É notória a relação entre o raciocínio matemático e a comunicação matemática, visível nas formas de representação utilizadas e a sua influência na promoção de resoluções matemáticas pessoais, inventivas tanto as mais informais como as de caráter mais formal ou mais simbólico. Este fenómeno está em sintonia com as caraterísticas do Campeonato de Matemática SUB12, por se tratar de um ambiente de resolução de problemas que possibilita aos participantes a liberdade de usar os seus próprios processos de resolução, apoiando-se no conhecimento matemático que já possuem, bem como na experiência e no conhecimento do senso comum, dando-lhes ainda o tempo suficiente que é visto como um fator decisivo no desenvolvimento da criatividade (Ching, 1997; Powell *et al*, 2009).

5.3. Perceções de participantes e dos respetivos professores acerca da criatividade no contexto de resolução de problemas do SUB12

Sendo estabelecida em muitas das orientações curriculares internacionais como uma das finalidades da educação matemática (Stacey, 2005; NCTM, 2000, 2007), a resolução de problemas é igualmente um meio poderoso a partir do qual os alunos aprendem matemática e desenvolvem habilidades cognitivas mais gerais (Pehkonen, 1997). Trata-se de numa capacidade transversal que estimula a aquisição de diferentes formas de pensar, a perseverança, a curiosidade e confiança para enfrentar situações desconhecidas (NCTM, 2007). É, além de tudo o mais, o tipo de tarefas, por excelência, que estimula e põe a descoberto a criatividade matemática, tanto dos matemáticos profissionais na produção de novo conhecimento matemático como dos jovens e crianças no seu percurso escolar (Pehkonen, 1997; Silver, 1997).

5.3.1. Posição sobre a resolução de problemas

Ao longo das entrevistas efetuadas às professoras participantes neste estudo, sobressai a importância atribuída à atividade de resolução de problemas na sua prática docente, bem como às suas potencialidades para desenvolver a criatividade matemática, assumindo ser frequente recorrerem a esta metodologia de ensino dada a sua importância transversal a todo o currículo de Matemática. Referem, além disso, a forma como o programa de Matemática do ensino básico, então em vigor, contribuía de forma explícita para uma atenção redobrada e uma maior ênfase na resolução de problemas. Com alguns cambiantes, as professoras consideram que a resolução de problemas tanto pode ser usada para a introdução de conteúdos matemáticos como para a sua aplicação e consolidação. Apoiam-se na resolução de problemas não só para os alunos acederem ao conhecimento matemático, mas também para estimularem uma aprendizagem mais eficaz com base na experimentação, conjetura, investigação, comunicação e criação matemática (Vale & Pimentel, 2011). Para elas não há *timings* específicos para envolverem os seus alunos na resolução de problemas uma vez que o fazem frequentemente e sem restrições, dando aos alunos autonomia e a possibilidade de experimentarem a criatividade matemática ao trabalharem na resolução de problemas de Matemática (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012). Esta forma de agir, que significa uma valorização da liberdade e autonomia para encontrar soluções, permite que os seus alunos usem o conhecimento que detêm para formarem uma visão coerente dos problemas que lhes são propostos e a partir dela chegar a formas próprias de obter as soluções (Mann, 2006; Shriki, 2009). As várias professoras são unânimes em afirmar que raramente fornecem as respostas, procurando antes ajudar os alunos com pistas, pequenas ajudas, questões, etc. Acreditam, portanto, na capacidade que estes possuem de delinear estratégias e prosseguir caminhos variados para alcançarem sucesso na resolução de problemas. Sublinham claramente que aceitam e promovem diversas abordagens dos seus alunos e que utilizam essa variedade de caminhos e formas de raciocínio para as partilhar e comunicar a todos na sala de aula. É portanto uma metodologia de trabalho que referem seguir nas suas aulas. Mais importante, porventura, é a maneira como descrevem a satisfação e o gosto em observarem estratégias e formas de abordar os problemas que não esperavam dos alunos. Estas professoras dão, assim, muito valor à surpresa, ao inesperado e às perspetivas mais singulares provenientes dos seus alunos.

Esta posição é confirmada pelos seus alunos, também entrevistados, que reconhecem que resolver problemas favorece e motiva para a aprendizagem matemática, bem como para o desenvolvimento de habilidades e capacidades cognitivas matemáticas, particularmente ao nível do raciocínio e da descoberta de diferentes estratégias de resolução (Gusev & Safuanov, 2012; Pehkonen, 1997; Vale & Pimentel, 2011). Esta tomada de consciência dos alunos é fruto de um caminho iniciado desde cedo no campo da resolução de problemas. Percebe-se que a sua predisposição foi muito influenciada pelos professores com quem se cruzaram e que lhes proporcionaram experiências significativas que os marcaram na disciplina de Matemática, tanto em sala de aula como através de incentivo à participação em competições extracurriculares, organizadas na escola ou exteriores. O facto de os alunos serem estimulados a resolver problemas, desde que iniciam a sua aprendizagem da Matemática, possibilita-lhes desenvolver hábitos cruciais como conjeturar, analisar e justificar os seus resultados (Prusak & Levenson, 2008), além de tornar legítimas e válidas práticas próprias de descoberta e de resolução (Na, Han, Lee & Song, 2007). Além disso, desenvolve-se nestes alunos uma grande bagagem ao nível do conhecimento matemático com compreensão e promove-se a sua criatividade matemática (Steinberg, 2013; Pehkonen, 1997). Em consonância com a visão das professoras sobre a multiplicidade de formas alternativas de resolução de um problema, estes alunos gostam de resolver problemas porque sabem que há várias maneiras de chegarem à solução e sabem também que isso é uma das caraterísticas da resolução de problemas. Têm igualmente consciência de que as suas professoras estimulam o gosto por formas diferentes de encarar um problema e por resoluções inesperadas. Por outro lado, mostram que isso constitui uma mais-valia porque lhes permite comparar variadas estratégias e aprender com os outros.

A confrontação com situações complexas e diversificadas devem ser traduzidas em oportunidades para os alunos pensarem por si mesmos, arquitetarem estratégias de resolução, relacionarem o conhecimento adquirido e formas de o representarem na busca de uma solução (Gontijo, 2006). Para os alunos entrevistados, resolver problemas é uma consequência mista de ideias brilhantes, inteligência e motivação, atributos consonantes com a expressão criativa dos indivíduos que gostam de Matemática e com forte inclinação para inovarem face às suas necessidades académicas, nomeadamente, na resolução de problemas (Kousoulas, 2010). Geralmente, a criatividade matemática enquanto caraterística individual está associada: à capacidade para ter ideias originais (Beghetto & Kaufman, 2013b), emergentes das operações mentais suportadas pelo conhecimento existente (Ward, 2007); à inteligência para dominar e usar conhecimento prévio para gerar conhecimento novo (Sternberg, 2008) e à capacidade matemática dos alunos (Silver, 1997; Vale, 2012); e à motivação, elemento que espoleta e potencia recursos cognitivos e de personalidade importantes para a realização de habilidades criativas (Stoycheva, 2002). Em particular, sabe-se que quanto maior for a motivação intrínseca, maior é a probabilidade de descobertas e aplicações criativas (Mann, 2005). Ora, os alunos entrevistados manifestam um prazer e um gosto inegáveis pela resolução de problemas de Matemática. Sentem-nos como desafios e apreciam a exaltação ou a "adrenalina" de vencer o obstáculo. E sempre que se deparam com problemas que não conseguem resolver não desistem e tentam encontrar formas de o fazer, mesmo que para isso tenham que recorrer a algum tipo de ajuda. Portanto, são alunos persistentes e sem medo de errarem ao experimentarem estratégias invulgares de resolução, ao mesmo tempo que processam informação de forma flexível (Sheffield, 2008). O raciocínio é uma palavra-chave para os alunos entrevistados associada à noção de resolução de problemas. Estes alunos confiam fortemente na sua capacidade de pensar, de raciocinar, de criar ideias, de usar o seu conhecimento e os seus recursos. Perante as dificuldades e no caso de necessidade, as professoras assumem apoiar os alunos ao nível da leitura, interpretação e compreensão, reavivando o seu conhecimento adquirido através de dicas e pistas, mas sem nunca lhes fornecerem as respostas. Também para elas, a capacidade de raciocínio dos alunos é muito importante, uma vez que lhes permite apropriarem-se do que sabem, das estratégias que escolhem, dos processos que utilizam e dos erros e das falhas que cometem. Esta forma de estar das professoras traz benefícios porque as ajuda a detetar erros suscetíveis de serem usados e explorados como uma medida ativa para o caminho de uma solução (Urban, 2007). Tratam-se, portanto, de professoras familiarizadas com a atividade de resolução de problemas e, consequentemente, contribuem ativamente para a motivação, desempenho e realização dos seus alunos (Pantziara & Philippou, 2007). São professoras que envolvem os seus alunos no ato criativo, incentivando-os a correr riscos intelectuais, sem os limitar a regras que impeçam o reconhecimento da essência dos problemas a serem resolvidos (Mann, 2006; Sriraman, 2009; Shriki, 2009).

5.3.2. Posição sobre a criatividade na resolução de problemas

Durante a atividade de resolução de problemas, por vezes, as professoras confessam ficar surpreendidas com as estratégias utlizadas pelos seus alunos sendo a sua tendência natural valorizá-las e expô-las, pedindo aos autores para as comunicarem, explicando-as aos restantes. Mas, de uma forma geral, referem que apenas alguns dos seus alunos revelam ser criativos e originais. Ainda assim, consideram que estas capacidades são acessíveis a todos. Esta ideia é corroborada pelos alunos que referem não primar pela originalidade sempre que resolvem um problema e que consentem que as suas professoras valorizam e toleram pensamentos incomuns, ideias originais e produtos novos, mostrando a importância dos esforços individuais para encontrar uma solução e não apenas o produto final (Urban, 2007). De acordo com Beghetto & Kaufman (2013), os professores que entendem que a criatividade combina originalidade e adequação estão em melhor posição para integrar a criatividade dos alunos no currículo, sendo capazes de o fazer no processo de aprendizagem dos conteúdos curriculares. Portanto, entende-se que estas professoras assumem um estilo integrador de ensino: incentivam a aprendizagem independente com base no domínio do conhecimento e no pensamento divergente; valorizam as sugestões e questões emergentes; ajudam a lidar com o fracasso e a frustração; encorajam a experimentar o novo e o incomum; esforçam-se para levar os alunos a estabelecer conexões e associações, bem como sobreposições, semelhanças e implicações lógicas; fomentam a capacidade de pensar em problemas de múltiplas maneiras; incitam a vontade de avaliarem o seu próprio trabalho; e estimulam a capacidade para comunicar os resultados (Cropley, 1997, referido por Beswick, 2008). São professoras atentas à forma como os seus alunos utilizam as suas mentes, o que as coloca numa posição privilegiada para observar e incentivar a capacidade criativa (Ward, 2007). Procuram estimular e desenvolver a originalidade dos seus alunos, acreditando que o mais importante não são apenas os conteúdos, mas também a prática de fazer matemática (Kattou, Kontoyianni & Christou, 2009). Assumem a responsabilidade de garantir que os seus alunos aprendam conteúdos de matemática e, simultaneamente, apoiam o desenvolvimento e manifestação do seu potencial criativo (Beghetto, 2013b). E só em último recurso, ou seja, quando os alunos não conseguem resolver um problema é que as professoras lhes apresentam a respetiva solução.

No entanto, ainda que as professoras assumam encontrar e apreciar resoluções diferentes construídas pelos seus alunos durante as tarefas de resolução de problemas, algumas das quais consideram criativas e originais, demonstraram dificuldade em distinguir o significado entre os dois conceitos. Tratando-se de professoras que investem na resolução de problemas ao longo da sua prática letiva, esta aparente dificuldade em discernir o que são produtos criativos e originais representa um fator limitador à exploração plena das potencialidades criativas dos seus alunos. O mesmo se aplica à sua visão sobre o papel do conhecimento matemático processual na criatividade matemática que claramente relativizam quando comparado com a originalidade e a capacidade de representação. É de notar que as professoras atribuem um papel de grande preponderância aos modos de representação matemática, considerando que as representações são aspetos que acrescentam interesse e originalidade às resoluções dos alunos e que demonstram, em muitas situações, as formas originais como estes conseguem encontrar um caminho para a solução. Este resultado vem ao encontro da ideia, já atrás referida, de que a criatividade mini-c, presente nos produtos criativos de crianças ainda muito jovens, parece estar fortemente apoiada sobre as duas dimensões Originalidade e Flexibilidade Representacional. De facto, para estas professoras, a flexibilidade representacional é um atributo a que dão clara importância no trabalho com os seus alunos, tornando-se em grande medida responsável pelo caráter inovador ou original das resoluções que mais as impressionam ou que mais as entusiasmam. Portanto, se as perceções das professoras acerca da criatividade e da sua relação com o conhecimento matemático forem imprecisas, é provável que o reconhecimento e o desenvolvimento do potencial criativo dos seus alunos se mostrem mais difíceis (Mann, 2005). Esta realidade vem corroborar a reclamação que se vai, cada vez mais, fazendo sentir da necessidade de programas de formação de professores sobre práticas pedagógicas numa visão interrelacionada de aprendizagem e criatividade (Beghetto & Plucker, 2006). Em todo o caso, e de forma aparentemente díspar, os alunos entrevistados dão um papel de destaque ao conhecimento matemático na resolução de problemas, parecendo não ecoar totalmente as perceções das suas professoras. Para os alunos, a resolução de problemas depende seguramente do conhecimento matemático dos indivíduos e dão mais destaque ao uso de métodos ou conceitos matemáticos poderosos do que à utilização de formas de representação diversificadas, tais como esquemas, gráficos, figuras, etc. Em certo sentido, parecem encontrar mais eficácia nos métodos mais formais do que nos métodos mais intuitivos ou exploratórios, embora não descurem a hipótese de estes últimos constituírem recursos a considerar na ausência de outras ferramentas matemáticas.

Do ponto de vista das professoras, particularmente através da resolução de problemas, a matemática escolar incentiva todos os alunos a serem originais e consequentemente criativos. Elas próprias estimulam as capacidades dos seus alunos dando-lhes liberdade de ação ao nível da resolução, da escolha de estratégias e da comunicação das resoluções, sem a imposição de procedimentos ou métodos pré-definidos. Trabalham a autonomia dos seus alunos de forma a que os mesmos se apropriem do conhecimento e compreendam o que aprendem. No entanto, esta liberdade permitida pelas professoras não significa que os alunos se envolvam na aprendizagem sem a sua orientação, mas apenas que lhes é permitida a sua interpretação e criação pessoal do conhecimento. Portanto, esta liberdade permitida pelas professoras inclui o seu envolvimento no processo para atuarem e ajudarem, se necessário, os alunos a associarem novo conhecimento às suas estruturas de conhecimento prévio, bem como a desenvolverem a metacognição necessária para acompanharem e darem sentido pessoal a como e quando devem usar o que aprenderam de forma significativa (Beghetto & Plucker, 2006).

5.3.3. Papel do SUB12 na manifestação da criatividade matemática

Em termos competitivos, as professoras consideram que o SUB12 é uma competição matemática que estimula os seus alunos para a atividade de resolução de problemas, atendendo às suas necessidades de aprendizagem e às suas aptidões. Para elas, o SUB12 é um desafio para os seus alunos ampliarem competências e capacidades matemáticas e, desta forma, "ganharem poder matemático" para conseguirem ir mais longe (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004), além de que é um recurso ao qual podem recorrer para apoiar o trabalho efetuado em sala de aula, devido ao banco de problemas que disponibiliza. É, portanto, uma atividade extracurricular em sintonia com o desenvolvimento cognitivo dos alunos que envolve a construção de significados, habilidades e capacidades de comunicação (Freiman, 2009) e visa atrair os alunos para a matemática (Freiman & Lirette-Pitre, 2008). Esta visão das professoras é consonante com as dos alunos, que reforçam a ideia de que o SUB12 é uma atividade complementar ao trabalho desenvolvido em sala de aula, pela influência que tem no processo ensino e aprendizagem e no desenvolvimento de capacidades importantes para o sucesso em Matemática. Os testemunhos dos alunos vão ao encontro do que é referido na literatura, na medida em que assumem que as competições matemáticas de resolução de problemas, para além da sala de aula, nas quais participam, constituem um estímulo para melhorar a sua aprendizagem (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004), bem como para o desenvolvimento das suas capacidades matemáticas (Freiman & Applebaum, 2009).

Face às potencialidade do SUB12 para o desenvolvimento do poder matemático dos jovens, as professoras assumem incentivar os seus alunos a participar, particularmente, os que são bons a resolver problemas por serem mais competitivos e encararem essa atividade como um desafio no confronto direto com os seus pares. Neste sentido, para as professoras, o SUB12 é uma das vias para os alunos que gostam de resolver problemas manifestarem e revelarem as suas potencialidades e capacidades matemáticas (Perleth & Wilde, 2007). Além disso, apontam o caráter desafiante do SUB12 como um fator de enriquecimento da aprendizagem da matemática, livre dos constrangimentos do currículo escolar (Taylor, 2009). Também os alunos entrevistados consideram que o SUB12 pode ter um poderoso impacto positivo na vida escolar dos participantes (Treffinger, 2008). Para eles, a participação no SUB12 constitui uma extensão do que aprendem em sala de aula, nomeadamente nos que diz respeito a capacidades transversais, como por exemplo, resolver problemas, comunicar e raciocinar (Harrison, 2006). Também eles encaram a sua participação como um desafio, o que de acordo com Leikin (2011) é central para a realização matemática dos alunos. E o desafio consiste na possibilidade de testarem as suas capacidades e conhecimentos matemáticos em contato com especialistas em matemática, que conferem rigor e mais peso à resolução dos problemas, bem como estimular a sua persistência para quererem ir mais longe no campeonato. Para alguns dos alunos entrevistados competir é uma satisfação e o principal objetivo não é exclusivamente vencer, pois só o facto de serem selecionados e participarem já é uma motivação que afasta a desilusão da derrota (Taylor, Gourdeau & Kenderov, 2004). Para outros, o SUB12 consiste numa oportunidade de aprender, particularmente como fator de enriquecimento, e dando a possibilidade de exibir capacidades de uma maneira especial (Taylor, 2009). É, portanto, um contexto que marca as atitudes dos alunos em relação à matemática e às suas capacidades de resolução de problemas, com reflexos significativos a nível educacional (Koichu & Andzans, 2009). A preparação dos alunos subjacente a este tipo de competições aumenta o seu conhecimento matemático de forma significativa (Kenderov, 2006). Logo, é legítimo pensar que o SUB12 pode ser encarado como um parceiro escolar, dado que ajuda os alunos a melhorar as suas capacidades na resolução de problemas, tal como como permite aprofundar a relação com diversos conteúdos de matemática (Freiman, 2009). Além disso, pelo facto de não obedecer à rigidez do currículo de Matemática e à organização do ensino dos tópicos matemáticos, o SUB12 é um meio natural para desenvolvimento da criatividade dos alunos (Koichu & Andzans, 2009; Freiman, 2009). Incentiva-os a explorar e atacar qualquer problema a partir de métodos e estratégias próprias ou modificando as já apreendidas.

O ambiente do SUB12 proporciona aos alunos problemas desafiadores, colocando à prova o seu conhecimento e a sua forma de raciocinar, como os próprios entrevistados admitem, dando por isso, muitas vezes, origem a produtos criativos (Nadjafikhah, Yaftian & Bakhshalizadeh, 2012). Os problemas propostos são variados e transversais a todos os conteúdos curriculares, visando cobrir uma variedade de tópicos matemáticos (Números e operações, Geometria, Álgebra, Raciocínio lógico, Combinatória, etc.) destinados ao 2.º ciclo do ensino básico e relacionados com os principais temas do programa de matemática e em perfeita articulação com as capacidades transversais – Resolução de problemas, Comunicação e Raciocínio (ME, 2007). Mesmo os problemas menos complexos permitem a abstração e generalização; incentivam a investigação, discussão e argumentação; promovem o uso e aplicação de princípios matemáticos profundos; e possibilitam o uso do conhecimento matemático existente, tal como a sua extensão (Hershkovitz, Peled & Litler, 2009). São problemas adequados a tornar visível e presente a criatividade matemática, uma vez que possibilitam métodos distintos de resolução e, ao mesmo tempo, incentivam os alunos a irem para além do conhecimento que dominam para encontrar cada solução (Mann, 2006). Dado o contexto, em termos gerais, tanto as professoras como os alunos consideram interessantes os problemas propostos no SUB12. A variabilidade do grau de dificuldade, além de evidenciar a adequação dos problemas a todos os participantes, também revela a essência da definição de problema, ou seja, a ausência aparente e imediata da respetiva solução. Os problemas colocados no SUB12, portanto, não são vistos como dirigidos a alunos especialmente dotados, mas sim acessíveis a todos alunos, cujo sucesso depende muito do gosto pela resolução de problemas e da persistência.

5.3.4. Papel do conhecimento matemático na resolução de problemas

Embora a maioria das professoras assuma ser necessário algum conhecimento de conteúdos de Matemática para resolver os problemas propostos no SUB12, consideram que não é assim em todos os problemas. Argumentam que os alunos não precisam de recorrer a conhecimentos matemáticos já adquiridos pois em muitos casos podem ser eles a construir esse conhecimento, de maneira intuitiva, informal e com base em estratégias de representação próprias e perspicazes. Já os seus alunos consideram que o conhecimento é sempre importante e influencia fortemente a compreensão dos problemas, bem como a escolha da estratégia de resolução. Portanto, para os alunos entrevistados resolver problemas do SUB12 sem um certo domínio do conhecimento matemático não é fácil, uma perspetiva que condiz com uma visão que defende a importância do conhecimento prévio para a produção de soluções criativas e úteis, isto é, matematicamente válidas e aceites (Subramaniam & Chia, 2007; Oiveira, 2010). Especificamente, o conhecimento prévio é importante para atacar os problemas, é a espinha dorsal para a organização de novas informações e determina em que medida são explorados e desenvolvidos novos conceitos matemáticos (Sheffield, 2009). Os indivíduos que revelam grande capacidade de dominar e usar o conhecimento que possuem para gerar conhecimento novo têm mais tendência para serem criativos (Sternberg, 2008). Com uma função complementar, o sentido de descoberta e experimentação, muito caraterístico do SUB12, advém fundamentalmente da possibilidade de os alunos desenvolverem as suas próprias abordagens na resolução dos problemas, algo que representa um potencial para aumentar as oportunidades de aprendizagem (LeBlanc & Freiman, 2011; Freiman, 2009). Assim sendo, a aprendizagem desenvolvida no contexto da participação no SUB12 constitui um complemento natural ao trabalho realizado em sala de aula (Koichu & Andzans, 2009), algo que é referido quer pelos alunos entrevistados, quer pelas suas professoras.

Na resolução dos problemas do SUB12, as professoras referem que as maiores dificuldades dos seus alunos se relacionaram com a interpretação e compreensão dos enunciados, bem como com a comunicação dos resultados. As professoras assumem então uma posição de apoio aos alunos, designadamente, no plano emocional, ajudando-os a ultrapassarem bloqueios como o medo de errar, o medo de ser criticado, sentimentos de inferioridade e insegurança (Gontijo, 2010). Os professores mais eficazes destacam-se pela sua capacidade de equilibrar o desenvolvimento cognitivo dos alunos com a estrutura curricular, proporcionando-lhes ocasiões para estes expressarem ideias que têm sentido para eles e que, por vezes, se mostram originais (Beghetto & Kaufman, 2007), mas ajudando-os também a compreender como essas ideias se enquadram dentro das convenções e dos objetivos curriculares (Beghetto, 2013b). De acordo com os alunos, a ajuda prestada pelas professoras fomentou o sentido de autonomia, dado que as pistas e dicas não foram limitadoras da sua liberdade de ação. Portanto, o tipo de ajuda dada aos alunos possibilitou a apropriação de diferentes estratégias de resolução, aumentando o seu reportório de ferramentas para resolver problemas. No conjunto, o SUB12 estimulou um ambiente criativo, que permitiu trabalhar e pensar numa atmosfera livre de stress e ansiedade e sem medo de errar, através de um *feedback* caraterizado por dicas e pistas, possibilitando a aceitação e exploração do erro e enganos como medidas ativas no caminho para uma solução, bem como pela tolerância e valorização de pensamentos incomuns, ideias originais e produtos criativos (Urban, 2007). Esta liberdade de ação que pressupõe o reconhecimento da essência da resolução de problemas – uma tarefa para a qual não se dispõe de uma forma prévia e imediata de chegar à solução – favoreceu o emergir e o desenvolvimento criatividade matemática (Mann, 2006).

5.3.5. Aptidão para resolver problemas e a importância das representações

Para as professoras e alunos entrevistados, um bom resolvedor de problemas combina habilidades (raciocínio, pensamento lógico, comunicação, rapidez, facilidade de resolução,...), com caraterísticas psicológicas (inteligência, calma, persistência, empenho, atenção,...). Alunos com estes atributos parecem envolver-se mais intensamente na resolução de problemas e de forma corajosa, sem temer correr riscos, e geralmente adquirem conhecimento e estabelecem relações entre conceitos, dados e modelos mais rapidamente (Freiman, 2006; Perleth & Wilde, 2007). Note-se, porém, que tanto as professoras como os alunos entrevistados concordam que resolver problemas está ao alcance de todos os alunos desde que se empenhem, embora assumam que alguns têm mais aptidão do que outros. Em particular, para as professoras, não há implicação direta entre ser bom aluno na disciplina de Matemática e ser competente na resolução de problemas. Analogamente, não acham que os alunos mais competentes na resolução de problemas são, por norma, mais criativos e originais ou que são, de alguma maneira, diferentes dos outros. Isto leva a crer que as professoras assumem que a capacidade criativa, associada à resolução de problemas, está ao alcance de qualquer aluno, sendo a segunda um meio para desenvolver a primeira. Portanto, parecem partilhar a conceção de que as potencialidades matemáticas e criativas dos alunos podem ser desenvolvidas, e que estas se revelam por vezes nos alunos com desempenho mais fraco na disciplina (Hershkovitz, Peled & Littler, 2009).

Muitas vezes os alunos têm experiências e bagagens diferentes, assim como graus de proficiência diversos e, como consequência, distinguem-se no domínio individual de diferentes representações. As professoras entrevistadas concordam ser importante o recurso a múltiplas representações e por isso incentivam a sua diversificação, salientando inclusive as que são construídas pelos próprios alunos, dado que funcionam de molde a apoiar os seus raciocínios e facilitam a comunicação dos esquemas mentais elaborados para encontrar as soluções. Trata-se do reconhecimento de que as representações são importantes para a compreensão, operacionalização e comunicação das ideias, conceitos e relações matemáticas, bem como para comunicar abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos (NCTM, 2007; Sajadi, Amiripour & Rostamy-Malkhalifeh, 2013). Quando os alunos têm a oportunidade de escolher os seus próprios modos de representação, torna-se inegavelmente mais fácil aceder às suas ideias, à forma como entendem os conceitos, aos seus processos de aprendizagem e à natureza de alguma dificuldade (Cerqueira & Vale, 2013). Cada forma de representação exprime elementos do raciocínio utilizado, subjacente à escolha da estratégia e à forma da sua comunicação (Preston & Garner, 2003). Assim, verifica-se que as professoras se apoiam nas representações usadas pelos alunos para reconhecerem e detetarem os modos de interpretação, de raciocínio utilizados (Clements, 2004) e de registo de ideias, considerando-os aspetos importantes na resolução de problemas (Cerqueira & Vale, 2013). Para além disso, a flexibilidade de representação é uma caraterística do pensamento criativo que constitui um aspeto da criatividade com clara relevância na resolução de problemas matemáticos (Haylock, 1997). De facto, relativamente a este ponto e, como última nota conclusiva, é aparente uma maior atribuição de valor aos modos de representação e ao uso de diferentes tipos de representações, designadamente não simbólicas, da parte das professoras do que da parte dos alunos entrevistados. Para estes, as representações têm a sua importância, mas parecem não ser suplantadas em relevância e poder matemático pelo uso de ferramentas simbólicas, de técnicas mais formais ou de métodos mais universais. Em certo sentido, parece notar-se alguma tendência para os alunos atribuírem um estatuto de maior credibilidade e validade às representações de índole mais convencional e menos espontânea. Por isso, também, são muito perentórios em olhar para a originalidade em matemática como sinónimo de algo mais avançado, isto é, revelador de um conhecimento mais profundo e adiantado.

5.4. Considerações finais

Apesar da extensa pesquisa já desenvolvida em torno da criatividade e das múltiplas formas de conceber a avaliação da criatividade (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013), este conceito revela-se complexo e problemático quando se procura a sua especificação num determinado domínio (Haylock, 1997; Mann, 2006). O caso da criatividade matemática, a par da criatividade científica, é ainda um dos mais negligenciados, especialmente quando comparado com a arte ou a literatura, por exemplo.

A definição de criatividade matemática e a sua apreciação e caraterização continuam a fazer parte da agenda atual e dos esforços dos investigadores neste campo. Alguns teóricos sugerem a ligação da criatividade ao pensamento divergente, enquanto outros afirmam que a resolução de problemas não rotineiros é o mais inequívoco sinal da presença de raciocínio matemático criativo (Nickerson, 1999).

O presente estudo optou por considerar a criatividade matemática numa relação muito próxima com a resolução de problemas matemáticos e focou-se nas produções de alunos bastante jovens (com 10-12 anos) numa competição de resolução de problemas para além da sala de aula e no que pensam, quer os alunos quer os seus professores, acerca da criatividade na resolução de problemas e do interesse pelo SUB12.

O campeonato de Matemática SUB12, como competição que se pretende inclusiva, valoriza problemas desafiadores e de dificuldade moderada que acima de tudo permitem formas de resolução diferentes e abordagens distintas em função do nível de conhecimento do indivíduo que os resolve. Em muitos casos, alguns dos problemas requerem dos alunos abordagens intuitivas e informais correspondentes a ideias e conceitos matemáticos importantes que só mais tarde aprenderão formalmente na escola. Por outro lado, este contexto é mais independente da lógica curricular e constitui uma oportunidade para oferecer aos alunos a liberdade, o tempo suficiente e a motivação para expressarem o seu raciocínio (Yushau, Mji, & Wessels, 2005). Esta liberdade gera a abertura necessária para a busca de formas produtivas de pensar que conjugam conhecimento matemático e a respetiva representação de forma criativa. Tudo isto conduziu a uma perspetiva teórica de criatividade que não se foca nos indivíduos especialmente dotados ou geniais mas refere-se genericamente aos estudantes que estão em processo de desenvolvimento do seu pensamento matemático, a adquirir conhecimento com os seus professores na escola e a obter competências em Matemática, ou seja, trata-se de estudar e analisar a criatividade que alguns teóricos designam por mini-c (Beghetto & Kaufman, 2007).

Percebe-se, por exemplo, como as resoluções selecionadas transmitem marcas de muitas das aprendizagens curriculares dos alunos e refletem capacidades transversais envolvidas na aprendizagem da matemática e no conhecimento matemático: Resolução de Problemas, Comunicação Matemática e Raciocínio Matemático. No que diz respeito à resolução de problemas, as resoluções apresentadas pelos participantes evidenciam que compreenderam os problemas, identificaram a informação importante e os objetivos a atingir, foram capazes de definir e aplicar um plano, escolher uma estratégia e os recursos adequados à sua execução. Relativamente ao raciocínio matemático, a quase generalidade das resoluções apresentadas mostra a explicação e a justificação dos processos, os resultados e as ideias matemáticas envolvidas e explicitadas através de procedimentos formais ou informais, geralmente muito suportados pelas representações utilizadas. E finalmente, ao nível da comunicação matemática, as resoluções recolhidas demonstram que os participantes foram capazes de representar informação e ideias matemáticas de diversas formas, bem como de exprimir conceitos e processos matemáticos, usando notação, simbologia e vocabulário próprios. Foi possível observar uma diversidade de modos de comunicar o pensamento matemático, evidenciados pelas várias representações utilizadas, nomeadamente, através de palavras, linguagem simbólica, esquemas, tabelas, imagens e ícones.

As resoluções analisadas por meio da aplicação do referencial proposto demonstram a possibilidade de caraterizar e compreender a criatividade presente na resolução de problemas moderadamente desafiadores e de como essa criatividade pode ser entendida num contexto que não o da criação de novas teorias ou conceitos matemáticos, mas sim o da criação de formas de pensamento matemático invulgares e produtivas, ainda que próprias de alunos bastante jovens. Foi evidenciado pelos dados que a criatividade na resolução de problemas pode caraterizar-se em termos das dimensões: Originalidade, Fluência de Conhecimento Matemático e Flexibilidade Representacional. Essa caraterização tornou evidente a primazia da originalidade sobre as restantes dimensões, incidindo sobre o que é porventura mais imediato na perceção da criatividade: ideias, estratégias, raciocínios e formas de comunicação incomuns ou invulgares, mas compreensíveis e significativas no domínio da matemática. Este maior imediatismo da componente da originalidade é geralmente entendido, como se verificou pelos depoimentos de alunos e professores, como o mais saliente indicador de criatividade matemática. Foi ainda visível nas análises efetuadas que a avaliação da criatividade das várias produções criativas mostra uma certa variedade na manifestação dos parâmetros estabelecidos, mas mostra também que os casos extremos são inexistentes. A criatividade mini-c é, portanto, capaz de acomodar uma relativa variedade de combinações das três dimensões e isso coaduna-se com o facto de se tratar de produções de alunos com potencial criativo, mas não necessariamente igualmente aptos em termos de fluência, ou flexibilidade representacional ou igualmente capazes de gerar ideias novas e perspicazes.

A tradução geométrica das pontuações atribuídas aos descritores, por meio de paralelepípedos cujas 3 dimensões (O, Fx, Fn) correspondem às três componentes da criatividade, proporcionou uma imagem volumétrica da medida da criatividade das resoluções. Nessa imagem os paralelepípedos obtidos mostram alguns cambiantes, ora com mais acentuação numa dimensão, ora noutra. Contudo, demonstram a clara expressão da originalidade que sobressai em todas as resoluções da amostra. A par desta dimensão, regista-se uma forte prevalência da Flexibilidade Representacional, aliás muito em consonância com a dimensão da Originalidade. Este resultado aponta para a importância e relevância das representações matemáticas e do seu papel estratégico, seja como suportes do raciocínio ou como veículos de comunicação do pensamento e das abordagens construídas, especialmente neste nível etário e no estádio de aprendizagem dos alunos. As professoras dos alunos finalistas declararam vivamente a atenção e o interesse que atribuem a este aspeto da atividade dos seus alunos na resolução de problemas, valorizando-o e cultivando-o. Este incentivo à construção de representações próprias, pessoais e únicas ou à utilização de representações convencionais e úteis para apoiar uma estratégia ou um raciocínio é consistente com a liberdade que elas dão aos seus alunos para avançarem com as suas ideias, de confrontarem essas ideias com as dos outros e de avaliarem as diversas alternativas encontradas. O efeito da Fluência de Conhecimento parece ser mais diluído na manifestação da criatividade, mas isso não torna esta dimensão irrelevante ou insignificante. Pelo contrário, verificou-se ser muito improvável uma elevada pontuação no que se refere ao conhecimento matemático transposto para o problema e simultaneamente uma fraca pontuação na vertente representacional. O que acontece, por vezes, é que a Fluência de Conhecimento permite sistemas de representação mais formais – ou como descrevem os alunos entrevistados, "resoluções mais avançadas" – que ganham em concisão, eficácia e generalidade, aspetos muito importantes na criatividade matemática.

Em relação ao modo de entender a criatividade matemática na resolução de problemas, pelos alunos e pelos professores, importa retirar desde logo a grande conclusão de que o gosto que eles sentem por esta atividade é decisivo. Dificilmente se pode ser criativo, fazendo algo de que não se gosta. Uma outra constatação muito clara é a da consciência muito apurada que os jovens revelam do que é um problema e do que é resolver problemas, em particular, dando grande destaque ao papel do raciocínio, às ideias produtivas e às diferentes abordagens possíveis, assim como à persistência e ao próprio conhecimento matemático prévio. As suas professoras mostram alimentar este tipo de atitudes e de perspetivas acerca da resolução de problemas, mas parecem valorizar bastante mais do que os jovens as capacidades de representação em matemática para o sucesso na resolução de problemas.

Ficou ainda bem claro que os contextos educativos podem ser mais ou menos potenciadores da criatividade, designadamente da criatividade matemática. Mais ainda, ficou elucidado que a criatividade pode e deve ser desenvolvida à medida que se aprende Matemática e não apenas quando já se conhece muita Matemática. Os alunos entrevistados relataram que o seu interesse por desafios e problemas de Matemática começou a desenhar-se muito cedo, nos anos iniciais de escolaridade. E sublinharam também que esse gosto se prende com o facto de se sentirem desafiados.

Dos dados das entrevistas emerge a ideia de que o SUB12, tal como outras competições matemáticas inclusivas, pode contribuir para o desenvolvimento da criatividade matemática dos alunos (Freiman & Applebaum, 2009). Além disso o campeonato é visto pelos participantes como uma atividade de enriquecimento curricular que promove um conjunto de competências que podem ser transportadas para a sala de aula. Nesta perspetiva, o SUB12 surge como um parceiro da escola, que além do mais constitui um bom exemplo de um contexto de realização do potencial criativo matemático dos jovens.

Confirma-se e reforça-se a tese de que a resolução de problemas pode constituir um motor poderoso para o desenvolvimento da criatividade matemática e mostra-se como essa criatividade se manifesta nas resoluções produzidas pelos jovens participantes.

5.5. Limitações e recomendações

Este estudo centrou-se no estudo da criatividade matemática a partir de produtos finais resultantes de um processo de resolução, por vezes longo, pelo que não entra em linha de conta com fatores que certamente estiveram envolvidos nesse processo, tais como o pensamento matemático dos alunos em busca da solução. Considera-se, portanto, que seria interessante investigar não apenas o produto criativo, mas também acompanhar o processo que leva a esse produto, isto é, incluir o estudo do processo criativo. Em particular, poderá ser importante explorar os tipos de raciocínio que os alunos desenvolvem ao longo da resolução de um problema, a fim de construir um quadro mais robusto sobre a criatividade matemática presente na resolução de problemas matemáticos dos mais jovens. Nas entrevistas realizadas aos alunos, estes referiram aspetos como as "ideias geniais" ou o "raciocínio" ou a "adrenalina" como marcas importantes da sua experiência de resolução de problemas. O presente estudo não permite atingir um entendimento efetivo do que poderão ser ou significar essas ideias e raciocínios a que os alunos fazem referência, bem como a tensão emotiva que está ligada ao desafio de encontrar a resposta. Outros dados sublinham igualmente a importância atribuída ao processo de resolução de problemas, maior do que aquela que conferem ao produto final, quer pelos alunos quer pelos professores. Um elemento sublinhado pela literatura que aborda a criatividade matemática ou a criatividade nas ciências é o da utilidade do produto criativo, não necessariamente a utilidade para a vida quotidiana, mas antes para o avanço do conhecimento, ou seja, a utilidade para a obtenção de respostas a problemas. Esta pode ser uma das hipóteses para entender a razão pela qual o processo criativo é aparentemente muito mais enfatizado do que o produto criativo pelos participantes neste estudo. De facto, parece que uma vez obtida a solução, o produto final perde valor em relação ao processo que levou à resposta. O ato criativo sobrepõe-se assim ao produto criativo. Este é um dos vários temas que emergem do presente estudo, mas que nele não encontram resposta.

No que se refere ao quadro conceptual que deu origem ao referencial de análise utilizado na caraterização dos produtos criativos, é necessário acentuar que ele toma como ponto de partida uma perspetiva já muito firmada e amplamente estudada e ensaiada em numerosas investigações como foi descrito na revisão da literatura. Trata-se de uma perspetiva psicométrica com claros vínculos à psicologia da invenção e do pensamento divergente. A tentativa feita no presente trabalho é a de transportar esse modelo tripartido da criatividade, que não é isento de críticas e de problemas, para o campo da criatividade matemática. Dessa intenção resultou uma reformulação e reinterpretação das dimensões do modelo que conduziram a dimensões, por assim dizer, adaptadas: originalidade (que se mantém inalterada), fluência (que é aqui entendida como proficiência matemática) e flexibilidade (que é aqui convertida em fluência representacional). Esta opção comporta naturalmente muitos riscos, alguns dos quais são herdados do modelo original. Com efeito, e de forma simplificada, o modelo original é problemático pela sua ênfase na fluência ideacional – a quantidade de ideias ou conceitos que o indivíduo ativa na tarefa – e pela sua simultânea depreciação através da flexibilidade – a variedade de categorias de ideias e conceitos mobilizados na tarefa. Em resumo, dir-se-á que se está perante uma indecisão entre a quantidade e a qualidade. O modelo que se propôs neste estudo mantém essa dificuldade, mas agora vista noutros termos. A fluência de conhecimento, que aqui se exprime não pela quantidade de ideias, conceitos e procedimentos matemáticos ativados, mas pela forma de os usar, explorar, aplicar e executar no processo de resolução, não se desliga facilmente da flexibilidade representacional e, pelo contrário, é de esperar que se entrecruzem. Portanto, alguma da contradição original persiste, ainda que agora relativa à indecisão entre conceitos e procedimentos matemáticos e as suas representações em diversos sistemas de representação. O modelo de análise proposto reflete esta limitação e não a ignora nem a desconhece. Na verdade, a operacionalização do referencial à análise das cinquenta resoluções escolhidas, decorreu de modo que os descritores da fluência de conhecimento (Fn) e os descritores da flexibilidade representacional (Fx) fossem aplicados de forma conjugada na codificação de cada resolução. Em suma, foi necessário, como se constata da descrição do processo de codificação de cada uma das resoluções, tratar de forma combinada ou articulada a categorização relativa aos sete descritores da fluência e aos sete descritores da flexibilidade.

Uma consequência deste tipo de limitação é a importância de desenvolver um longo treino na aplicação dos descritores à codificação de resoluções. No caso deste estudo, para além da vasta quantidade de ensaios realizados e do recurso à confrontação com outros codificadores como meio de ajustar interpretações, a crescente confiança que foi havendo resultou também das apreciações recolhidas junto de investigadores em educação matemática, aquando da apresentação de resultados parcelares desta investigação em conferências nacionais e internacionais (Amaral & Carreira, 2014; Amaral & Carreira, 2012).

O esquema de categorização proposto é pois passível de várias críticas, bem como suscetível de aperfeiçoamentos futuros, quer do ponto de vista conceptual quer do ponto de vista da sua estruturação. O que este modelo oferece, entretanto, é a possibilidade de adotar uma conceção da criatividade matemática e de permitir identificá-la de forma mais objetiva e menos vaga nos produtos criativos.

Em futuras investigações, será desejável procurar outros contextos para utilizar o modelo analítico proposto, seja em contextos extracurriculares, por exemplo noutras competições de resolução de problemas, seja em contextos curriculares em que a resolução de problemas esteja fortemente implementada. Obviamente que são aconselháveis novas experiências de aplicação do referencial de modo a gerar resultados que permitam melhor aferir a sua fiabilidade e, mesmo, levar ao seu apuramento.

Com este trabalho, espera-se contribuir para a investigação no campo da criatividade, estudando a sua expressão e a sua natureza no âmbito da resolução de problemas matemáticos por crianças do ensino básico. Optou-se por escolher uma atividade que decorre para além da sala de aula, não apenas porque se antevê uma atividade matemática menos condicionada por pressões curriculares, mas também porque, apesar da variedade de ofertas que existe fora da escola para os alunos que gostam de resolver problemas, há falta de estudos e dados sobre as mesmas. Portanto justifica-se a realização de mais estudos empíricos sobre os programas existentes, competições ou outros, que permitam uma melhor compreensão das suas vantagens na realização do potencial matemático dos alunos e no desenvolvimento da sua criatividade.

A educação matemática deve assim prestar mais atenção aos tipos de tarefas matemáticas a privilegiar, entre as quais se inclui certamente a resolução de problemas, com vista ao desenvolvimento do talento criativo dos alunos. Atividades extracurriculares de resolução de problemas desenvolvidas em contextos competitivos, de que é exemplo o SUB12, podem representar, como foi plenamente evidenciado neste estudo, um valor acrescentado sobre trabalho que os alunos realizam diariamente na aula de matemática.

Um ensino da Matemática empenhado no desenvolvimento da criatividade pode e deve ser estimulado em sala de aula, como ficou bem evidente nos testemunhos dos alunos e dos professores intervenientes neste estudo. Conceções como a importância da liberdade na escolha e exploração de caminhos para resolver um problema, a noção de que um problema pode ser resolvido geralmente de várias formas diferentes, o cultivo da persistência e do gosto por desafios estão em clara sintonia com a promoção da criatividade matemática.

Percebe-se, no entanto, dos resultados obtidos que há ainda muito trabalho a fazer por parte dos investigadores da criatividade matemática e dos professores de Matemática na construção e apropriação de um quadro conceitual mais amplo para entender a natureza da criatividade matemática. De facto, a multidimensionalidade da criatividade parece ser ainda bastante desconhecida, razão pela qual há uma certa propensão para a identificar com uma única caraterística: a originalidade. Além disso, seria relevante estudar a divergência verificada entre os alunos e as professoras entrevistados quanto ao papel do conhecimento matemático na resolução de problemas. Enquanto que as professoras assumem que o conhecimento matemático prévio não é decisivo para resolver os problemas propostos no SUB12, valorizando mais o raciocínio, os alunos defendem a necessidade e a importância de conhecimento matemático para a sua resolução. Por se tratar de uma questão relacionada com a fluência do conhecimento matemático e com as suas implicações sobre a criatividade matemática considera-se que merece atenção de futuras investigações, uma vez que neste estudo não foi possível abordá-la profundamente.

Em geral, há muitas razões para recomendar que a educação matemática dê mais atenção à pesquisa, implementação e divulgação de diferentes atividades e práticas matemáticas que valorizem o talento criativo dos alunos. Novas contribuições para a teorização da criatividade matemática, designadamente procurando explorar e aprofundar o que chamamos de criatividade "mini-c" (Beghetto & Kaufman, 2007), terão igualmente uma função crucial para a compreensão da criatividade que pode revelar-se e ser estimulada, desde cedo, no percurso escolar dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agathangelou, S., Gagatsis A. & Papakosta, V. (2008). The role of verbal description, representational and decorative picture in mathematical problem solving. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education: Conference of Five Cities: Nicosia, Rhodes,* Bologna*, Palermo, Locarno* (pp. 39-56). Cyprus: University of Cyprus.

Ainsworth, S. (1999). The Functions of Multiple Representations. *Computers & Education*, **33**, 131-152.

Aizikovitsh-Udi, E. (2013). Creativity and Critical Thinking in Solving Non-Routine Problems among Talented Students. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*, (pp. 1270-1271). Ankara, Turkey: European Society for Research in Mathematics Education.

Aizikovitsh-Udi, E. (2014). The Extent of Mathematical Creativity and Aesthetics in Solving Problems among Students Attending the Mathematically Talented Youth Program. *Creative Education*, **5**, 228-241.

Aldous, C. R. (2007) Creativity, problem solving and innovative science: Insights from history, cognitive psychology and neuroscience. *International Education Journal*, **8**(2), 176-186.

Alencar, E. M. L. S. (2003). Creativity in Higher Education. In M. I. Stein. (Org.). *Creativity's Global Correspondents - 2003*, (pp. 1-7). New York: New York University.

Alencar, E. M. L. S. (2008). Barreiras à promoção da criatividade no ensino fundamental. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, **24**(1), 59-66.

Alfonso, A. M. T. & Martínez, D. M. (2008). Developing the Understanding by Means of a Didactic Model that Favors the Mathematical Creativity. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education,* (pp. 120-126). University of Rousse, Bulgaria.

Almeida, L. S. & Freire, T. (2003). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação*. Braga: Psiquilibrios.

Alvarenga, D. & Vale, I. (2007). A exploração de problemas padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, **16**(1), 27-55.

Amabile, T. M. (2012). Componential Theory of Creativity. [Artigo]. Disponível em http://www.hbs.edu/faculty/Publication%20Files/12-096.pdf.

Amaral, N., & Carreira, S. (2012). An essay on students' creativity in problem solving beyond school – proposing a framework of analysis. In *Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12) – Topic Study 3*, (pp. 1584-1593). Seoul, South Korea: ICMI.

Amaral, N., & Carreira, S. (2014). Highlighting creativity in children's beyond-school mathematical problem solving. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving,* (pp. 16-18). Faro: Universidade do Algarve.

Andresen, M. (2007). Introduction of a New Construct: The conceptual tool "Flexibility". *The Montana Mathematics Enthusiast*, **4**(2), 230-250.

Applebaum, M., Leikin, R. & Freiman, V. (2008). *Views on Teaching Mathematically Promising Students*. Paper presented at ICME 11, Topic Study Group 6 - Activities and Programs for Gifted Students. Disponível em: http://tsg.icme11.org/tsg/show/7#inner-documents.

Apllebaum, M. & Saul, M. (2009). Anecdotes and assertions about creativity in the working mathematics classroom. In R. A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 272-284). Rotterdam: Sense Publishers.

Aralas, D. (2008). Mathematical Creativity and its Connection with Mathematical Imagination. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education,* (pp. 23-32). University of Rousse, Bulgaria.

Aspinwall, L., Haciomeroglu, E. E. & Presmeg, N. (2008). Students' Verbal Descriptions that Support Visual and Analytic Thinking in Calculus. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 97-104). Morelia, México: PME.

Azevedo, C. E. F., Oliveira, L. G. L., Gonzalez, R. K. & Abdalla, M. M. (2013). A Estratégia de Triangulação: Objetivos, Possibilidades, Limitações e Proximidades com o Pragmatismo. In *IV Encontro de Ensino e Pesquisa em Administração e Contabilidade*. Brasília, Brasil. Disponível em: http://www.anpad.org.br/diversos/trabalhos/EnEPQ/enepq_2013/2013_EnEPQ5.pdf.

Baran, G., Erdogan, S. & Çakmak, A. (2011). A Study on the Relationship between Six-Year-Old Children's Creativity and Mathematical Ability. *International Education Studies*, **4**(1), 105-111.

Barbeau. E. J. & Taylor, P. J. (2009). Preface. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*, (pp. v-vii). New York, NY: Springer.

Barbot, B., Besançon, M. & Lubart, T. I. (2011). Assessing Creativity in the Classroom. *The Open Education Journal*, **4**(1), 58-66.

Bardin, L. (2002). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Beghetto, R. A. (2007). Creativity Research and the Classroom: From Pitfalls to Potential. In A. Tan (Ed.), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 101-116). Singapore: World Scientific.

Beghetto, R. A. (2013a). Nurturing Creativity in the Micro-Moments of the Classroom. In K. H. Kim, J. C. Kaufman, J. Baer & B. Sriraman (Eds.), *Creatively gifted students are not like other gifted students: Research, theory, and practice* (Vol. 4, pp. 3-15). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Beghetto, R. A. (2013b). Creativity: Development And Enhancement. In J. A. Plucker & C. M. Callahan (Eds.). *Critical Issues and Practices in Gifted Education: What the Research Says,* (pp. 181-194). Waco, TX: Prufrock Press.

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2007). Toward a Broader Conception of Creativity: A case for "mini-c" creativity. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, **1**(2), 73-79.

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2009). Do we all have multicreative potential? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(1-2), 39-44.

Beghetto, R. A. & Kaufman, J. C. (2013). Fundamentals of Creativity. *Creativity Now!*, **70**(5), 10-15.

Beghetto, R. A., & Kaufman, J. C. (2014). Classroom contexts for creativity. *High Ability Studies*, **25**(1), 53-69.

Beghetto, R. A., Kaufman, J. C., Hegarty, B., Hammond, H., & Wilcox-Herzog, A. (2012). Cultivating Creativity, Play and Leisure in Early Childhood Education: A 4C Perspective. In O. N. Saracho & B. Spodek (Eds.). *Contemporary Perspectives on Creativity in Early Childhood Education* (pp. 247-266). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Beghetto, R. A. & Plucker, J. (2006). The Relationship Among Schooling, Learning, and Creativity. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds), *Creativity and Reason in Cognitive Development* (pp. 316-332). New Jersey: Cambridge.

Benjamin, A., Foy, J., Konowitch, J. & Mauprivez, X. (2013). *The Effects of Speed and Accuracy on Mathematical Fluency: Interactive Qualifying Project 2013*. Worcester Polytechnic Institute [Report]. Disponível em: http://www.wpi.edu/Pubs/E-project/Available/E-project-043013-201336/unrestricted/ IQPDocumentActual.pdf.

Benko, P. & Maher, C. A. (2006). Students constructing representations for outcomes of experiments. In J. N. H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-143). Prague, Czech Republic: PME.

Berthold, K. & Renkl, A. (2005). Fostering the Understanding of Multi-Representational Examples by Self-Explanation Prompts. In B. G. Bara, L. Barsalou & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the CogSci 2005* (pp. 250-255). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Beswick, K. (2008). Fostering Creativity by Establishing the Conditions for Complex Emergence. In E. Velikova & A. Andžāns (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education*. The 11th International Congress on Mathematical Education (pp. 127-132). University of Rousse, Bulgaria.

Blinder, C., Haughton, E., & Bateman, B. (2002). Fluency: Achieving True Mastery in the Learning Process. [Article]. Disponível em: http://www.fluency.org/Binder_Haughton_Bateman.pdf.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Bonka, D. & Andzans, A. (2008). First little Steps on a God-Knows-How Long Route. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 296-302). University of Rousse, Bulgaria.

Borba, M. C. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(4), 453-465.

Budak, I. (2012). Mathematical profiles and problem solving abilities of mathematically promising students. *Educational Research and Reviews*, 7(16), 344-350.

Bulgar, S. (2008). Enabling More Students to Achieve Mathematical Success. In B. Sriraman (Ed.), *Creativity Giftedess, and Talent Development in Mathematics* (pp. 133-154). Charlotte, NC: IAP

Cañadas, M. C., Castro E. & Castro, H. (2008). Description of a Procedure to Identify Strategies: The Case of the Tiles Problem. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol 2, pp. 257-264). Morelia, México: PME.

Candeias, A. A. (2008). Criatividade: Perspectiva integrativa sobre o conceito e a sua avaliação. In M. F. Morais & S. Bahia (Coords). *Criatividade: Conceito, Necessidades e Intervenção* (pp. 41-63). Braga: Psiquilíbrios Edições.

Carreira, S., Amado, N. (Coords.), Ferreira, R. A., Rodriguez, J., Silva, J. C., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S. & Mestre R. B. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs*. Faro: Universidade do Algarve. ISBN: 978-989-8472-19-9.

Carmo, H. & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da investigação – Guia para a Auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Carvalho, A. (2008). Representações dos alunos. Que raciocínios revelam? *Educação e Matemática*, N.º 102, 2-10.

Cerqueira, C. & Vale, I. (2013). Da Resolução de Problemas à Criatividade num Contexto Pré-Escolar. In I. Vale., A. Barbosa, A. Peixoto & T. Pimentel (Orgs.), *Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos* (pp. 53-65). Viana do Castelo: EDPROF.

Chávez-Eakle, R. A., Eakle, A. J. & Cruz-Fuentes (2012). The Multiple Relations between Creativity and Personality. *Creativity Research Journal*, **24**(1), 76-82.

Ching, P. (1997). An experiment to discover mathematical talent in a primary school in Kampong Air. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **29**(3), 94-96.

Cibulis, A. & Lace, G. (2008). The experience of development of pupils' creativity in Latvia. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 217-223). University of Rousse, Bulgaria.

Clary, R. M., Brzuszek, R. F. & Fulford. C. T. (2011). Measuring Creativity: A Case Study Probing Rubric Effectiveness for Evaluation of Project-Based Learning Solutions. *Creative Education*, **2**(4), 333-340.

Clement, L. (2004). A Model for Understanding, Using, and Connecting Representations. *Journal of Teaching Children Mathematics*, **11**(2), 97-102.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th edition). New York: Routledge.

Coutinho, C. P. (2008). A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: questões relativas à fidelidade e validade. *Educação Unisinos*, **12**(1), 5-15.

Coutinho, C. P. & Chaves (2002). O Estudo de Caso na Investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Eucação*, **15**(1), 221-243.

Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2nd Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cropley, A. & Cropley, D. (2007). Using Assessment to Foster Creativity. In A. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 209-230). Singapore: World Scientific.

Cropley, A. & Cropley, D. (2011). Creativity and Lawbreaking. *Creativity Research Journal*, **23**(4), 313-320.

Csikszentmihalyi, M. (1999). Implications of a Systems Perspective for the Study of Creativity. In R. Sternberg (Ed.), *Handbook of Creativity* (pp. 313-335). New York: Cambridge University Press.

Davis, G. A. & Rimm, S. B. (2004). *Education of the Gifted and Talented*. Boston: Allyn and Bacon.

Demetriou, A. (2004). Mind, intelligence and development: A cognitive, differential, and developmental theory of intelligence. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Developmental change: Theories, models and measurement* (pp. 21–73). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (2008). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (pp. 1-44). Thousand Oaks, CA: Sage

Diezmann, C. M. & Lowrie, T. (2009). The role of fluency in a mathematics item with an embedded graphic: interpreting a pie chart. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(5), 651-662.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 103-131.

Elia, L., Panhuizen-Heuvel, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(5), 605-618.

Elo, S. & Kingas, H. (2007). The Qualitative Content Analysis Process. *Journal of Advanced Nursing*, **62**(1), 107–115.

English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). *Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development*. Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME11) – Topic Study Group 19: Research and development in problem solving in mathematics education. Disponível em: http://tsg.icme11.org/document/get/458.

Erbilgin, E. & Fernández, M. L. (2008). Spatial Ability, Achievement, and Use of Multiple Representations in Mathematics. In D. E. McDougall & J. A. Ross (Eds), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting: North American Chapter of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-NA XXVI (Vol. 1, pp. 263-270). Toronto, Canada: PME.

Feldhusen, J. F. (2006). The Role of the Knowledge Base in Creative Thinking. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds), *Creativity and Reason in Cognitive Development* (pp. 137-144). New Jersey: Cambridge University Press.

Fernandes, D. M. (1994a). *Utilização da folha de cálculo no 4.º ano de escolaridade: Estudo de uma turma*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Fernandes, D. M. (1994b). *Educação Matemática no 1.º ciclo do ensino básico: Aspectos inovadores*. Porto: Porto Editora.

Fleith, D. & Alencar, E. (2005). Escala sobre o Clima para Criatividade em Sala de Aula. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, **21**(1), 85-91.

Fontana, A. & Frey, J. (1994). Interviewing: The art of science. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research* (pp. 361-376). Thousand Oaks: Sage Publications.

Freiman, V. (2006). Problems to Discover and to Boost Mathematical Talent in Early Grades: A Challenging Situations Approach. In B. Sriraman (Eds.), *The Montana Mathematics Enthusiast*, **6**(1&2), 51-75.

Freiman, V. (2009). Mathematical e-nrichement: problem-of-the-week model. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 367-381). Rotterdam: Sense Publishers.

Freiman, V. & Applebaum (2009). Involving students in extra-curricular school mathematical activity: virtual mathematical marathon case study. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 203- 206). Thessaloniki, Greece: PME.

Freiman, V., Kadijevich, D., Kuntz, G., Pozdniakov, S. e Stedoy, I. (2009). Technological Environments beyond the Cassroom. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*, (pp. 97-131). New York: Springer.

Freiman, V. & Lirette-Pitre, N. (2008). Building a virtual learning community of problem solvers: example of CASMI community. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**, 245-256.

Freiman, V. & Rejali, A. (2011). New Perspectives on Identification and Fostering Mathematically Gifted Students: Matching Research and Practice. *The Montana Mathematics Enthusiast*, **8**(1&2), 161-166.

Friedlander, A & Tabach, M. (2001). Promoting Multiple Representations in Algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *Yearbook of the National Council of the Teachers of*

Mathematics: The Roles of Representation in School Mathematics (pp.173-185). Reston, Virginia: NCTM.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, **24**(5), 645-657.

Gerhardt, T. E. (2009). A Construção da Pesquisa. Pesquisa Científica. In T. E. Gerhardt & D. T. Silveira (Orgs.), *Métodos de pesquisa* (pp. 43-64). Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf.

Gerhardt, T. E., Ramos, I. C. A., Riquinho, D. L. & Santos, D. L. (2009). Estrutura do Projeto de Pesquisa. In T. E. Gerhardt & D. T. Silveira (Orgs.), *Métodos de pesquisa* (pp. 65-88). Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf.

Godino, J. D. & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* **9**(1), 189-210.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Gomez, J. G. (2007). What Do We Know About Creativity? *The Journal of Effective Teaching*, **7**(1), 31-43.

Gontijo, C. H. (2006). Estratégias para o desenvolvimento da criatividade em matemática. *Linhas Críticas*, **12**(23), 229-244.

Gontijo, C. H. (2007). *Relações entre Criatividade, Criatividade em Matemática e Motivação em Matemática de Alunos do Ensino Médio*. Tese de Doutoramento. Universidade de Brasília, Brasil.

Gontijo, C. H. (2010). Criatividade em Matemática: Conceitos, Metodologias e Formas de Avaliação. In *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. [Artigo]. Disponível em: http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T1_CC1949.pdf.

Gontijo, C. H. (2011). Currículo e criatividade no campo da Matemática. In *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. [Artigo]. Disponível em: http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1605.pdf.

Grainger, T. & Barnes, J. (2006). Creativity in the primary curriculum. In A. James, T. Grainger & D. Wray (Eds.), *Learning to Teach in the Primary School* (pp. 209-225). London: Routledge.

Gruber, H. E. & Wallace, D. B. (1999). The Case Study Method and Evolving System Approach for Understanding Unique Creative People at Work. In R. J. Sternberg

(Ed.), *Handbook of Creativity*, (pp. 3-16). Cambridge, NY: Cambridge University Press.

Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). Competing Paradigms in Qualitative Research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research,* (pp.105-117). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Gusev, V. & Sufuanov, I. (2012). Fostering Creativity of Pupils in Russia. In *ICME 12 - Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1513-1518). Seoul, South Korea: ICMI.

Hadamard, J. (1954). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications.

Hamivand, L. (2012). A Comparative Study of Creativity and Intelligence of Students in Wechsler Intelligence Scale and Children's Apperception Test. *Journal of American Science*, **8**(8), 184-188.

Hamza, M. K. & Griffith, K. G. (2006). Fostering Problem Solving & Creative Thinking in the Classroom: Cultivating a Creative Mind! *National FORUM of Applied Educational Research Journal*, **19**(3), 1-30.

Hansen-Smith, B. (2008). Wholemovement Approach to Creativity in Math Education. In E. Velikova & L. Sheffield (Orgs.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 56-61). University of Rousse, Bulgaria.

Harries, T., Lopez, P., Reid, H., Barmby, P., & Suggate, J. (2008). Observing children's inductive reasoning processes with visual representations for multiplication. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 1, p. 268). México, Morelia: PME.

Harrison, C. (2006). Postmodern Research and E-Learning: Anatomy and representation. *European Educational Research Journal*, **5**(2), 80-93.

Hashimoto, Y. (1997). The Methods of Fostering Creativity through Mathematical Problem Solving. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **29**(3), 86-87.

Haylock, D. (1997). Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **29**(3), 68-74.

Heinze, A., Star, J. R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(5), 553-540.

Hershkovitz, S., Peled, I. & Littler, G. (2009). Mathematical creativity and giftedness in elementary school: task and teacher promoting creativity for all. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 255-269). Rotterdam: Sense Publishers.

Huang, R. & Cai, J. (2007). Constructing pedagogical representations to teach linear relations in Chinese and U. S. classrooms. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 65- 72). Seoul, South Korea: PME.

Irish National Teachers' Organisation (2009). *Creativity and the Arts in the Primary School - Discussion Document and Proceedings of the Consultative Conference on Education 2009*. Dublin: Irish National Teachers' Organisation.

Jacinto, H. (2008). *A Internet e a Actividade Matemática no Caso do Sub14.* Dissertação de Mestrado, Universidade Católica Portuguesa, Lisboa.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Problem solving in and beyond the classroom: perspectives and products from participants in a web-based mathematical competition. In *ICME 12 - Pre-Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 2933-2942). Seoul, South Korea: ICMI.

Jones, K. & Simons, H. (1999). *Online Mathematics Enrichment: an independent external evaluation of the NRICH project 1998-99*. Centre for Research in Mathematics Education. Southampton, UK: University of Southampton Design & Print Centre.

Karakelle, S. (2009). Enhancing fluent and flexible thinking through the creative drama process. *Thinking Skills and Creativity*, **4**, 124–129.

Karkockiene, D. (2005). Creativity: Can it be Trained? A Scientific Educology of Creativity. cd-*International Journal of Educology, 2005 Lithuanian Special Issue*, 51-58. [Artigo]. Disponível em: http://eric.ed.gov/?id=ED494897.

Karp, A. & Leikin, R. (2009). Mathematical gift and promise: exploring and developing. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 185-186). Thessaloniki, Greece: PME.

Kattou, M., Kontoyianni, K. & Christou, C. (2009). Mathematical creativity through teachers' perceptions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 297-304). Thessaloniki, Greece: PME.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). Does Mathematical Creativity Differentiate Mathematical Ability? In M, Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1056-1065). University of Rzeszów, Poland: ERME.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM - International Journal on Mathematics Education,* **45**, 167-181.

Kaufman. J. C. (2009). *Creativity 101.* (The Psych 101 Series). New York, NY: Springer.

Kaufman, J. C. & Baer, J. (2006). Introduction. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds.), *Creativity and Reason in Cognitive Development* (pp. 1-4). New Jersey: Cambridge University Press.

Kaufman, J. C. & Beghetto, R. A. (2009). Beyond Big and Little: The Four C Model of Creativity. *Review of General Psychology*, **13**(1), 1-12.

Kenderov, P. S. (2006). Competitions and Mathematics Education. In M. Sanz-Solé, J. Soria, J. L. Varona & J. Verdera (Eds), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 1584-1598). Universidad Castilla-La Mancha, Spain.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M. G. B., Pandelieva, V., Richter, K., Maschieto, M., Kadijevich, D. & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom: Sources and Organizational Issues. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*, (pp. 53-96). New York: Springer.

Koichu, B. & Andzans, A. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. In R., A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 286-307). Rotterdam: Sense Publishers.

Koichu, B., Katz, E. & Berman, A. (2007). What is a beautiful problem? An undergraduate students' perspective. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds), *Proceedings of the 31 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 109- 113). Seoul, South Korea: PME.

Kothari, C. R. (2004). *Research Methodology: Methods and Techniques* (2nd Revised Edition). New Delhi: New Age International Publishers.

Kousoulas, F. (2010). The Interplay of Creative Behavior, Divergent Thinking, and Knowledge Base in Students' Creative Expression During Learning Activity. *Creativity Research Journal*, **22**(4), 387-396.

Kurtzberg, T. R. & Amabile, M. T. (2001). From Guilford to Creative Synergy: Opening the Black Box of Team-Level Creativity. *Creativity Research Journal*, **13**(3-4), 285-294.

Lassig, C. J. (2012). Creating creative classrooms. *The Australian Educational Leader*, **34**(2), 8-13.

LeBlanc, M. & Freiman, V. (2011). Mathematical and Didactical Enrichment for Pre-service Teachers: Mentoring Online Problem Solving in the CASMI Project. *The Montana Mathematics Enthusiast*, **8**(1&2), 291-318.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330- 2339). Larnaca, Cyprus: ERME.

Leikin, R. (2009a). Teaching the mathematically promising: focusing on one teacher. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 206- 211)(Vol. 1). Greece, Thessaloniki: PME.

Leikin, R. (2009b). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 130-144). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R. (2011). The Education of Mathematically Gifted Students: Some Complexities and Questions. *The Montana Mathematics Enthusiast*, **8**(1&2), 167-188.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, **55**(4), 385-400.

Leikin, R., Berman, A. & Koichu, B. (2009). Introduction. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. vii-viii). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R. & Lev. M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **45**(3), 183-197.

Leikin, R. & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **45**(3), 159-166.

Leikin, R., Subotnik, R., Pitta-Pantazi, D. Singer, F. M. & Pelczer, I. (2013). Teachers' views on creativity in mathematics education: an international survey. *ZDM-International Journal on Mathematics Education*, **45**(2), 309-324.

Lénárd, I. (2008). Gifted and Non-Gifted Students and Teachers. In E. Velikova & A. Andžāns (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 69-79). University of Rousse, Bulgaria.

Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2009). Multiple Solutions for a Problem: A Tool for Evaluation of Mathematical thinking in Geometry. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the*

European Society for Research in Mathematics Education (pp. 776-785). France, Lyon: ERME.

Liljedahl, P. (2004). *The Aha! Experience: Mathematical Contexts, Pedagogical Implications*. Doctoral Thesis. Simon Fraser University, Canada.

Liljedahl, P. (2009). In the words of the creators. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 51-69). Rotterdam: Sense.

Losada, M. F., Yeap, B., Gjone, G. & Pourkazemi, M. H. (2009). Curriculum and Assessment that Provide Challenge in Mathematics. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*, (pp. 285-315). New York, NY: Springer.

Ludke, M. & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU.

MacDonald, S. & Headlam, N. (2009). *Research Methods Handbook - Introductory guide to research methods for social research*. Manchester: Centre for Local Economic Strategies.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students.* Doctoral Thesis. University of Connecticut, USA.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, **30**(2), 236-260.

Marconi, M. A. & Lakatos, E. M. (2003). *Fundamentos de Metodologia Científica*. São Paulo: Atlas.

Marshall, A. M., Superfine, A. C. & Canty, R. S. (2010). Star Students Make Connections. *Teaching Children Mathematics*, **17**(1), 38-47.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante*, **3**(1), 19-53.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mayer, R. E. (2006). The Role of Domain Knowledge in Creative Problem Solving. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds), *Creativity and Reason in Cognitive Development* (pp. 145-158). New Jersey: Cambridge University Press.

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum: Qualitative Social Research* [On-line Journal], **1**(2). Disponível em: http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/1089/2386.

Meissner, H. (2008). Intuitive – Creative – Gifted – Logical: An Analysis For The Discussion Group DG9 at ICME 11. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.) *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 80-88). University of Rousse, Bulgaria.

Menelaou, A., Gagatsis, A. & Sergiou, S. (2008). Fractions, decimal numbers and their representations: A research in 5th and 6th grade of elementary school. In A. Gagatsis (Ed.), *Research In Mathematics Education: Conference of Five Cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno* (pp. 85-98). Cyprus: University of Cyprus.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: a qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Milgram, R. M. & Hong, E. (2009). Talent loss in mathematics: causes and solutions. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 150-163). Rotterdam: Sense Publishers.

Mina, F. (2008). Promoting Creativity for All *Students* in Mathematics Education. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.) *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 97-103). University of Rousse, Bulgaria.

Moraes, R. (1999). Análise de conteúdo. *Revista Educação*, **22**(37), 7-32.

Morais, M. F. & Azevedo, I. (2009). Avaliação da Criatividade como um Contexto Delicado: Revisão de Metodologias e Problemáticas. *Avaliação Psicológica*, **8**(1), 1-15.

Moyer, P. S., Niezgoda, D. & Stanley, J. (2005). Young Children's Use of Virtual Manipulatives and Other Forms of Mathematical Representations. In J. M. William & P. C. Elliot (Eds.), *Technology-supported mathematics learning environments: Sixty-seventh yearbook* (pp. 17-34). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Mozzato, A. R. & Grzybovski, D. (2011). Análise de Conteúdo como Técnica de Análise de Dados Qualitativos no Campo da Administração: Potencial e Desafios. *Revista de Administração Contemporânea*, **15**(4), 31-747.

Na, G., Han, D. & Song, S (2007). Mathematically gifted students' problem solving approaches on conditional probability. In J, Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds), *Proceedings of the 31 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1- 8). Seoul, South Korea: PME.

Nadjafikhah, M., Yaftian, N. & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: some definitions and characteristics. *Social and Behavioral Sciences*, **31**, 285-291.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa de NCTM, 2000).

NCTM (2014). Procedural Fluency in Mathematics: A Position of the National Council of Teachers of Mathematics. [Artigo]. Disponível em http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=42833.

Nistal, A. A., Dooren, V., Clarebout, G., Helen, J. & Verschaffel (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(3), 627-636

NRC (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

OCDE (2013). PISA 2015. Draft Mathematics Framework. Disponível em: http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf.

OCDE (2014). PISA 2012 Results: Creative Problem Solving. Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V). Disponível em: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-volume-V.pdf.

O'Keefe, P. A., Letourneau, S. M., Homer, B. D., Schwartz, R. N. & Plass, J. L. (2014). Learning from multiple representations: An examination of fixation patterns in a science simulation. *Computers in Human Behavior*, **35**, 234-242.

Oliveira, Z. M. F. (2010). O elo entre a educação, o desenvolvimento sustentável e a criatividade. *Revista Ibero-americana de Educação*, **51**(3), 1-10.

Oliveira, E., Ens, R. T., Andrade, D. B. S. F. & Mussis, C. R. (2003). Análise de Conteúdo e Pesquisa na Área da Educação. *Revista Diálogo Educacional*, **4**(9), 11-27.

Oppenheimer, D. M. (2008). The secret life of fluency. *Trends in Cognitive Sciences*, **12**(6), 237–241.

Orey, D. C. (2010). Manifestations of mathematical inventiveness in at-risk (Immigrant) high school students performing arithmetical calculations. In P. Brosnan, D. B. Erchick & L. Flevares (Eds), *Proceedings of the 32^th^ Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. IV, pp. 327-333). Ohio, USA: PME.

Pantziara, M. & Philippou, G. (2007). Students' motivation and achievement and teachers' practices in the classroom. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.57 - 64). Seoul, South Korea: PME.

Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory into Pratice*, **40**(2), 118-127.

Pattivisan, S. & Niess, M. L. (2008). Mathematical Problem Solving Processes of Thai Gifted. In B. Sriraman (Ed.), *Creativity Giftedess, And Talent Development In Mathematics* (pp. 185-207). USA: IAP.

Pehkonen, E. (1997). The State-of-Art in Mathematical Creativity. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **29**(3), 63-67.

Pelczer, I. & Rodríguez, F. G. (2011). Creativity Assessment in School Settings Through Problem Posing Tasks. *The Montana Mathematics Enthusiast*, **8**(1&2), 383-398.

Pereira, M. & Saraiva, M. (2008). O sentido do símbolo na aprendizagem da álgebra em alunos do 7.º ano de escolaridade. In R. González *et al*. (Eds), *Investigation en Education Matemática XII*. Badajoz: Sociedade Española de Investigation en Education Matemática, SPCE e APM.

Perleth, C. & Wilde, A. (2007). Identification of Talents: A Social Psychological and Multi-Cultural. In A. Tan (Ed.), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 143-165). Singapore: World Scientific.

Pinheiro, S. & Vale, I. (2013). Criatividade e Matemática: Um Caminho Partilhado. In I. Vale., A. Barbosa, A. Peixoto & T. Pimentel (Orgs.), *Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos* (pp. 30-39). Viana do Castelo: EDPROF.

Pizarro, D. A., Detweiler-Bedell, B., & Bloom, P. (2006). The Creativity of Everyday Moral Reasoning: Empathy, Disgust, and Moral Persuasion. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds), *Creativity and Reason in Cognitive Development* (pp. 81-98). New Jersey: Cambridge University Press.

Plucker, J. & Zabelina, D. (2009). Creativity and interdisciplinarity: one creativity or many creativities? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(1-2), 5-11.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, **3**(1), 3-18.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, **25**, 105-132.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in mathematics classroom. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **39**, 419-430.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática*, N.º **100**, 89-96.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Lisboa.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. *Boletim do GEPEM*, **59**, 53-68.

Powell, A. B., Borge, I. C., Fioriti, G. I., Kondratieva, M., Koublanova, E. & Sukthankar, N. (2009). Challenging Tasks and Mathematics learning. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 133-169). New York, NY: Springer.

Presmeg, N. (2013). Creative Advantages of Visual Solutions to Some Non-Routine Mathematical Problems. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.). *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving.* (pp. 156-167). Faro: Universidade do Algarve.

Preston, R. & Garner, A. S. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **9**(1), 38-43.

Prusak, N. & Levenson, E. (2008). Developing Mathematical Tasks Suitable For Gifted Elementary School Students. In R. Leikin (Ed), *Proceedings of The 5th Internacional Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 385- 387). Haifa, Israel.

Ramos, R. C. S. S. & Salvi, R. F. (2009). Análise de Conteúdo e Análise do Discurso em Educação Matemática – Um olhar sobre a produção em periódicos Qualis A1 e A2. [Artigo]. Disponível em http://www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem/arquivos/9GT94689598053.pdf.

Ramos-Christian, V., Schleser, R. & Varn, M. E. (2008). Math Fluency: Accuracy Versus Speed in Preoperational and Concrete Operational First and Second Grade Children. *Early Childhood Education Journal*, **35**(6), 543–549.

Robinson, N. M. (2005). Nurturing Your Child's Creativity. *Gifted Education Communicator: A Journal for Educators and Parents*, **36**(2), 4-5.

Rostan, S. M. (2010). Studio Learning: Motivation, Competence, and the Development of Young Art Students' Talent and Creativity. *Creativity Research Journal*, **22**(3), 261-271.

Runco, M. A. (2003). Education for Creative Potential. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 47(3), 319-324.

Runco, M. A. (2004a). Everyone Has Creative Potential. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko, & J. L. Singer (Eds.), *Creativity: From potential to realization* (pp. 21–30). Washington, DC: American Psychological Association.

Runco, M.A. (2004b). Creativity. *Annual Review of Psychology*, **55**, 657-687.

Runco, M. A. (2006). Reasoning and Personal Creativity. In J. C. Kaufman & J. Baer (Eds), *Creativity and Reason in Cognitive Development* (pp. 99-116). New Jersey: Cambridge University Press.

Runco, M. A. & Jaeger, G. J. (2012). The Standard Definition of Creativity. *Creativity Research Journal*, **24**, 92-96.

Runco, M. A., Millar, G., Acar, S. & Cramond, B. (2010). Torrance Tests of Creative Thinking as Predictors of Personal and Public Achievement: A Fifty-Year Follow-Up. *Creativity Research Journal*, **22**(4), 361-368.

Runco, M. A., & Richards, R. (1998). *Eminent creativity, everyday creativity, and health*. Norwood, NJ: Ablex.

Russell, S. J. (2000). Principles and Standards: Developing Computational Fluency with Whole Numbers. *Teaching Children Mathematics*, **7**(3), 154-158.

Sajadi, M., Amiripour, P. & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2013). The Examining Mathematical Word Problems Solving Ability under Efficient Representation Aspect. *Mathematics Education Trends and Research*, Volume **2013**, 1-11. Disponível em http://www.ispacs.com/journals/metr/2013/metr-00007/article.pdf.

Samaniego, A. H. F. (2008). Learning Mathematics, Doing Mathematics: Creativity in Classroom? In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 303-307). University of Rousse, Bulgaria.

Saraiva, M. J. (2008). Raciocinar em matemática com imagens visuais vagas e com intuição. *Educação e Matemática*, N.º **100**, 29-32.

Saundry, C. & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: young children's mathematical reasoning through pictures. In J. N. H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 57-63). Prague, Czech Republic: PME.

Sawyer, R. K. (2003). Introduction. In R. K. Sawyer, V. John-Steiner, S. Moran, R. J. Sternberg, D. H. Feldman, J. Nakamura & M. Csikszentmihalyi (Eds), *Creativity and Development* (pp. 3-11). New York, NY: Oxford University Press.

Scheuermann, A. & Garderen, V. G. (2008). Analysing Sttudents Use of Graphic Representations: Determining Misconceptions and Error Patterns for Instruction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **13**(8), 471-477.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Scott, G., Leritz, L. E. & Mumford, M. D. (2004). The Effectiveness of Creativity Training: A Quantitative Review. *Creativity Research Journal*, **16**(4), 361-388.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**(5), 619-625.

Sharma, S. (2010). Qualitative Methods in Statistics Education Research: Methodological Problems and Possible Solutions. In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. Netherlands: International Statistical Institute. Disponível em: http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_8F3_SHARMA.pdf.

Sharma, K. & Teper, Y. (2008). The Gifted and Talented: Creativity, Cultural Perspectives and Skills. In R. Leikin (Ed), *Proceedings of the 5th Internacional Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 211- 215). Haifa, Israel.

Sheffield, L. J. (2008). Questioning Mathematical Creativity – Questions May Be the Answer. In R. Leikin (Ed), *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 29-34). Haifa, Israel.

Sheffield, L. J. (2009). Developing mathematical creativity – Questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 88-100). Rotterdam: Sense Publishers.

Shiakalli, M. & Gagatsis, A. (2006). Compartmentalization of representation in tasks related to addition and subtraction using the number line. In J. N. H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 105-111). Prague, Czech Republic: PME.

Shriki, A. (2009). Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies Mathematics*, **73**, 159-179.

Silva, A. H. S. & Fossá, M. I. T. (2013). Análise de Conteúdo: Exemplo de Aplicação da Técnica para Análise de Dados Qualitativos. In *IV Encontro de Ensino e Pesquisa em Administração e Contabilidade*. Disponível em: http://www.anpad.org.br/diversos/trabalhos/EnEPQ/enepq_2013/2013_EnEPQ129.pdf.

Silva, L. R. C., Damaceno, A. D., Martins, M. C. R. & Sobral, K. M. (2009). Pesquisa Documental: Alternativa Investigativa na Formação Docente. In *IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia*, (pp. 4554-4566). Disponível em: http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2009/anais/pdf/3124_1712.pdf.

Silveira, D. T. & Córdova, F. P. (2009). Pesquisa Científica. In T. E. Gerhardt & D. T. Silveira (Orgs.), *Métodos de pesquisa* (pp. 31-42). Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **29**(3), 75-80.

Simon, M. A. (2007) Mathematics: a human potential. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds), *Proceedings of the 31 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 109- 113). Seoul, South Korea: PME.

Sophocleous, P. & Pitta-Pantazi, D. (2011). Creativity in Three-Dimensional Geometry: How Can an Interative 3D-Geometry Software Environmente Enhance It? In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1144-1153). University of Rzeszów, Poland: ERME.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education*, **27**(1), 20-36.

Sriraman, B. (2008). Are Mathematical Giftedness and Mathematical Creativity Synonyms? A Theoretical analysis of Constructs. In B. Sriraman (Ed.), *Creativity Giftedess, And Talent Development in Mathematics* (pp. 85-112). Charlotte, NC: IAP.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **29**(3), 13-27.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behaviour*, **24**, 341–350.

Starko, A. J. (2010). *Creativity in the Classroom: Schools of Curious Delight*. New York, NY: Routledge.

Steele, D. (2008). Seventh-grade students' representations for pictorial growth and change problems. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **40**, 97-110.

Steinberg, R. (2013). A Mathematically Creative Four-Year-Old – What Do We Learn from Him? *Creative Education*, **4**(1), 23-32.

Stemler, S. (2001). An overview of content analysis. *Practical Assessment, Research & Evaluation*, **7**(17). Disponível em: http://pareonline.net/getvn.asp?v=7&n=17.

Sternberg, R. J. (2003). The Development of Creativity as a Decision-Making Process. In R. K, Sawyer, V. John-Steiner, S. Moran, R. J. Sternberg, D. H. Feldman, J. Nakamura & M. Csikszentmihalyi (Eds), *Creativity And Development* (pp. 91-138). New York, NY: Oxford University Press.

Sternberg, R. J. (2006). Creating a vision of creativity: the first 25 years. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, **1**, 2-12.

Sternberg, R. (2007). Creativity as a Habit. In A. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 3-25). Singapore: World Scientific.

Sternberg, R. J. (2008). Teaching for Creativity. In T. S. Yamin (Ed.), *Excellence in Education 2008: Future Minds and Creativity* (pp. 55-70). Paris, France: The International Centre for Innovation in Education.

Sternberg. R. & Lubart, T. (1999). The Concept of Creativity: Prospects and Paradigms. In R. Sternberg (Ed.), *Handbook of Creativity* (pp. 3-15). Cambridge, NY: Cambridge University Press.

Stoycheva, K. (2002). Ambiguity Tolerance and Creativity in Adolescents. In M. I. Stein (Ed.), *Creativity's Global Correspondents* (pp. 34-38). New York: New York University.

Stylianou, D. (2008). Representation as a cognitive and social pratice. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds), *International Group for the Psychology of Mathematics Education: proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, pp. 289-296). Morelia, México: PME.

Subramaniam, R. G. N. & Chia, L. (2007). Use of Word Symbol Puzzles to Foster Creativity Among Students. In A. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 263-278). Singapore: World Scientific.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Tan, A. (2007). Creativity for Teachers: Introduction. In A. Tan (Ed.), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. xxxi-liv). Singapore: World Scientific.

Taylor, P. (2008). ICMI Study 16: Current Perspectives. In R. Leikin (Ed), *Proceedings of The 5th Internacional Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 49-56). Haifa, Israel.

Taylor, P. (2009). Challenge in mathematics learning – Were to from here? In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 71-85). Rotterdam: Sense Publishers.

Taylor, P., Gourdeau, F., & Kenderov, P. (2004). The role of mathematical competitions in mathematics education. In M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 495-497). Roskild University, Denmark.

Teo, L. K. C. & Waugh, R. F. (2010). A Rasch Measure of Fostering Creativity. *Creativity Research Journal,* **22**(2), 206-218.

Treffinger, D. J. (2008). Creative Problem Solving (CPS): Powerful Tools for Managing Change and Developing Talent. In T. S. Yamin (Ed.), *Excellence in Education 2008: Future Minds and Creativity* (pp. 109-122). Paris, France: The International Centre For Innovation In Education.

Trigo, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Prática. In R. González, B. Alfonso, M. Machín & L.J. Nieto (Eds.*). Investigación en educación matemática XII/Investigação em educação matemática XII* (pp. 159-187). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **13**(8), 438-445.

Tuckman, B. W. (2005). *Manual de Investigação em Educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Urban, K. K. (2007). Assessing Creativity: A Componential Model. In A. Tan (Ed), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. 167-184). Singapore: World Scientific.

Vale, I. (2011). Tarefas desafiantes e criativas. [Artigo]. Disponível em: https://www.yumpu.com/pt/document/view/13340479/tarefas-desafiantes-e-criativas.

Vale, I. (2012). As Tarefas de Padrões na Aula de Matemática: Um Desafio para Professores e Alunos. *Interações*, **8**(20), 181-207.

Vale, I., Barbosa, A. & Fonseca, L. (2014). Mathematical creativity through the eyes of future teachers in early childhood. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.). *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving.* (pp. 229-241). Faro: Universidade do Algarve.

Vale, I. & Pimentel, T. (2011). Mathematical Challenging Tasks in Elementary Grades. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1152-1164). University of Rzeszów, Poland: ERME.

Vale, I. & Pimentel, T. (2013). Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade. In I. Vale, A. Barbosa, A. Peixoto & T. Pimentel (Orgs.), *Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos* (pp. 9-10). Viana do Castelo: EDPROF.

Vasconcelos, I. C. O. (2010). Estratégias metodológicas de pesquisa: decisões no estudo da prática didático-pedagógica. *Universitas: Relações Int*ernacionais, **8**(1), 231-243.

Velikova, E. (2008). Promoting Creativity For All Students – Educational Thecnology and Multimedia Usage. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the*

Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education, (pp. 330-344). University of Rousse, Bulgaria.

Walliman, N. (2011). *Research Methods – The Basics*. London: Routledge.

Ward, T. B. (2007). The Multiple Roles of Educators in Children's Creativity. In A. Tan (Ed.), *Creativity: A Handbook for Teachers* (pp. xvii-xxx). Singapore: World Scientific.

Warner, L. B., Schorr, R. Y. & Davis, G. E. (2009). Flexible use of symbolic tools for problem solving, generalization, and explanation. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, **41**, 663-679.

Wells, M. G (2007). Collaborative online projects in a global community. In T. Townsend & R. Bates (Eds.), *Handbook of Teacher Education: Globalization Standards and Professionalism in Times of Change* (pp. 657-674). The Netherlands: Springer.

Worthington, M. (2005). *Reflecting on creativity and cognitive challenge: visual representations and mathematics in early childhood - some evidence from research*. [Artigo]. Disponível em http://www.childrens-mathematics.net/articles_reflecting_on.pdf.

Yee, F. P. (2008). Teachers' Conceptions of Mathematical Creativity. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 133-140). University of Rousse, Bulgaria.

Yerushalmy, M. (2009). Educational Technology and Curricular Design: Promoting Mathematical. In R. A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 101-114). Rotterdam: Sense Publishers.

Yew, T. P. (2008). Developing Mathematical Creativity by Forcing Connections. In E. Velikova & A. Andžans (Eds.), *Proceedings of the Discussion Group 9: Promoting Creativity for All Students in Mathematics Education. The 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 180-185). University of Rousse, Bulgaria.

Yin, R. (1989). *Case Study Research. Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Zabelina, D. L. & Robinson, D. (2010). Creativity as Flexible Cognitive Control. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*, **4**(3), 136–143

Zazkis, R. & Holton, D. (2009). Snaphsots of creativity in undergraduate mathematics education. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 346-365). Rotterdam: Sense Publishers.

Zhang, L. & Sternberg, R. (2011). Revisiting the Investment Theory of Creativity. *Creativity Research Journal*, **23**(3), 229-238.

Zhe, L. (2012). Survey of Primary Student's Mathematical Representations Status and Study on the Teaching Model of Mathematical Representation. *Journal of Mathematics Education*, **5**(1), 63-76.

ANEXOS

Anexo 1 – Resoluções do problema 10: fase de apuramento da edição 2012/13

Resolução S1A10 (6.ºano)

1- Para resolver este problema, fiz o levantamento dos dados:

63 pessoas no buffet

6 não beberam sumo nem café

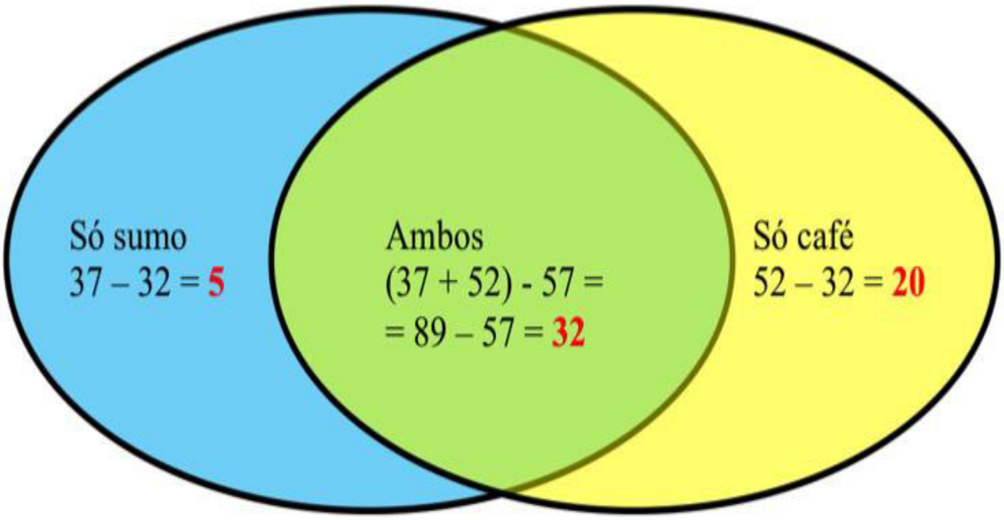
37 beberam sumo

52 beberam café

63 – 6 = 57, 57 pessoas beberam sumo café, ou as duas coisas.

2- Depois construi o diagrama de Venn:

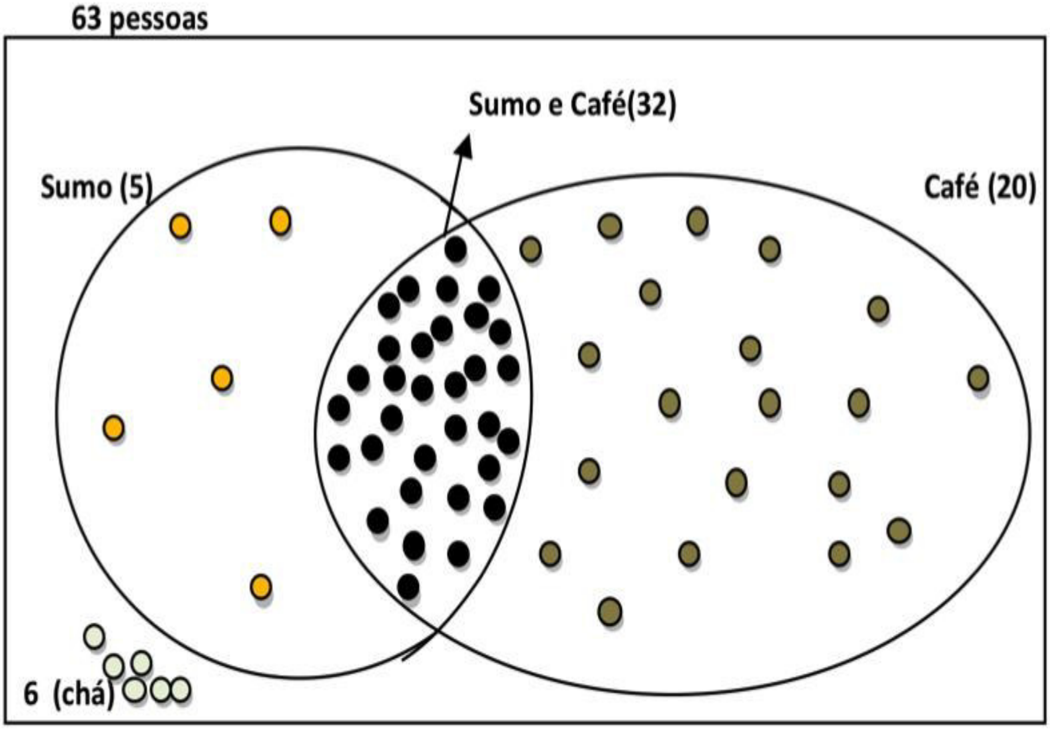
37 pessoas que beberam sumo + **52** pessoas que beberam café = **89**
89 - **57** pessoas que beberam sumo, café ou ambos = **32** pessoas que beberam ambos.



As pessoas beberam sumo e também café, foram 32.

Resolução S2A10 (6.º ano)

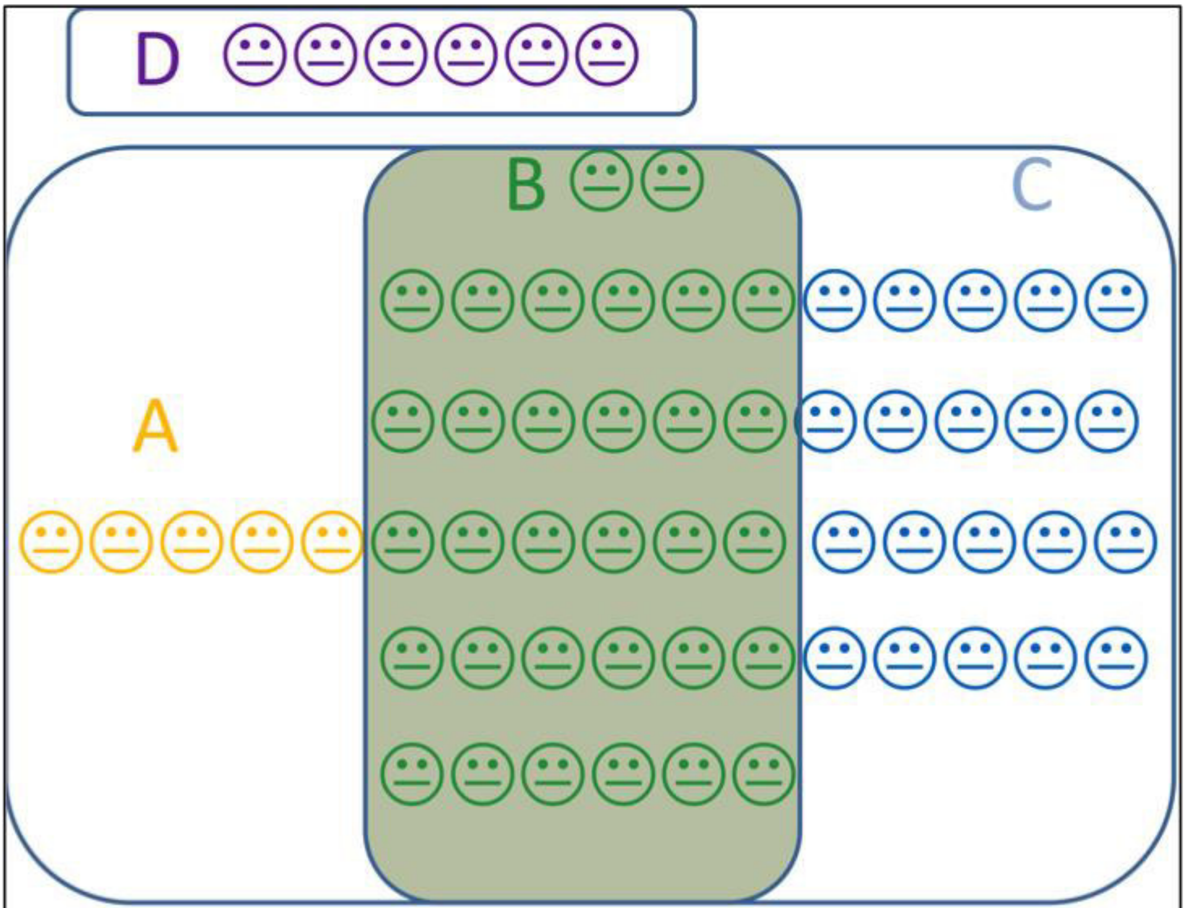
- Comecei por retirar às 63 pessoas que estiveram no buffet do pequeno almoço, as que só beberam chá, pois não me interessavam para a minha resposta e fiquei com 57 pessoas que beberam café e/ou sumo, dum total de 89 (37 sumo+52 café).
- A interseção destes dois números de pessoas 89 e 57, vai-me dar as pessoas que beberam as duas bebidas. Então 89-57=32.
- Confirmei, representando a situação num diagrama de Venn e já tinha utilizado na
- aula para resolver um problema parecido com este:



- Depois confirmei com cálculos:

Café + Sumo + Chá + Café e sumo = 20+5+6+32= 63 pessoas

Resolução S3A10 (5.º ano)



A- Só sumo; B- Café e Sumo; C- Só Café; D- Chá

Houve 32 pessoas que beberam sumo e também café.

Eu cheguei à minha resposta com um diagrama de Venn.

Se 6 dos 63 não beberam sumo nem café, apenas 57 podem ter bebido sumo ou café.

Dos 57, 52 beberam café. Logo, houve 5 que beberam apenas sumo. Se subtrairmos 5 aos 37 que beberam sumo, chegamos à conclusão que houve 32 pessoas a beber café e sumo.

63 pessoas (Total)

63-6 (beberam chá)=57 (beberam sumo **e/ou** café)
57- 52 (beberam café)= 5 (só beberam sumo)
37 (beberam sumo) - 5 (só beberam sumo)= **32** (beberam sumo **e** café)

Resolução S4A10 (6.ºano)

No hotel Pacífico estiveram 63 pessoas no buffet do pequeno almoço.
Ao todo, houve 37 pessoas que se serviram de sumo e 52 pessoas que se serviram de café.
Sabendo que apenas 6 pessoas não beberam sumo nem café porque preferiam chá, quantas pessoas beberam sumo e também café?

RESOLUÇÃO:

Para resolvermos este problema, elaborámos uma tabela que preenchemos com os dados que nos eram fornecidos no enunciado, Assim:

	Sumo	Não Sumo	TOTAL
Café	32	20	52
Não Café	5	6	11
TOTAL	37	26	63

1.º escrevemos os dados fornecidos pelo SUB12

2.º preenchemos um total e uma célula que nos forneceram o resto dos números

3.º foi fazer as contas para preencher o resto

RESPOSTA: Vendo os dados na tabela, reparamos que o número de pessoas que bebeu café e sumo foi de 32.

Resolução S5A10 (5.º ano)

depois de ler o problema resolvemos representar as 63 pessoas como retângulos numa tabela, como mostra a figura. Depois fomos pintando os retângulos a partir do problema.

	café	café	café	café	café	café	café	café
	café	café	café	café	café	café	café	café
	café	café	café	café	café	café	café	café
		café	café	café	café	café	café	café
		café	café	café	café	café	café	café
		café	café	café	café	café	café	café
		café	café	café	café	café	café	café

legenda:

chá
sumo
café

No fim contámos quantos retângulos tinham a cor laranja (sumo) e a palavra café.

Resosta: 32 pessoas beberam sumo e café.

Resolução S6A10 (6.º ano)

Bebida	Café	Sumo	Chá
Número	52	37	6

63 – 6 = 57 Clientes hotel – consumidores de chá = 57 pessoas

52 + 37 = 89 Consumidores de café + consumidores de sumo = 89 consumidores de café e /ou sumo

89 – 57 = 32 Consumidores de café e / ou sumo – 57 pessoas = **32 pessoas de beberam café e sumo**

Também poderia resolvê-lo assim:

63-6=57 Clientes hotel – consumidores de chá = 57 pessoas

57-52=5 Pessoas – 52 consumidores de café = 5 consumidores de só sumo

37 -5 = 32 Consumidores de sumo - de Consumidores de só sumo = **32 Consumidores de sumo e café**

Resolução S7A10 (5.º ano)

Resposta: Beberam sumo e café, 32 pessoas.

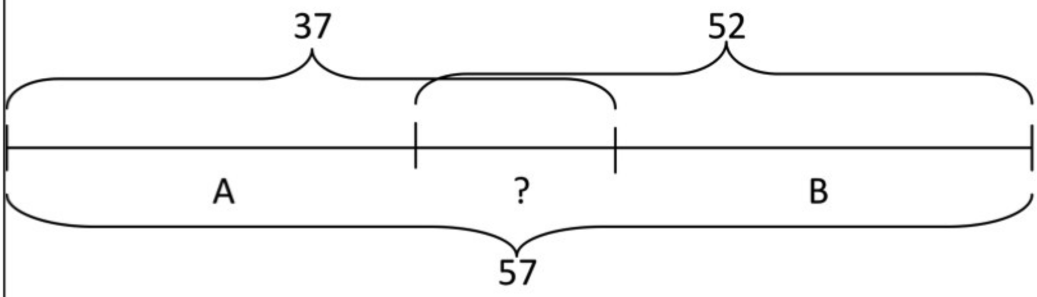
Havia 63 pessoas no *buffet*; onde havia chá, café e sumo.

Sabendo que 6 pessoas beberam chá…

63 – 6 = 57

…, então, 57 pessoas pediram ou café ou sumo.

Se 37 pessoas se serviram de sumo e 52 pessoas se serviram de café…



A=57 – 52=5

B=57 – 37=20

?=57 – (A + B) =

=57 – 25=

=<u>**32**</u>

…32 pessoas beberam sumo

Resolução S8A10 (6.º ano)

No hotel Pacífico estiveram 63 pessoas no buffet do pequeno almoço.
Ao todo, houve $\boxed{37}$ pessoas que se serviram de sumo e $\boxed{52}$ pessoas que se serviram de café. Sabendo que apenas 6 pessoas não beberam sumo nem café porque preferiam chá, quantas pessoas beberam sumo e também café?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

só chá

63 - 6 = 57 pessoas beberam sumo e/ou café

$\boxed{52 \text{ cafés}}$ $\boxed{37 \text{ sumos}}$

57 - 52 = 5 beberam só sumo

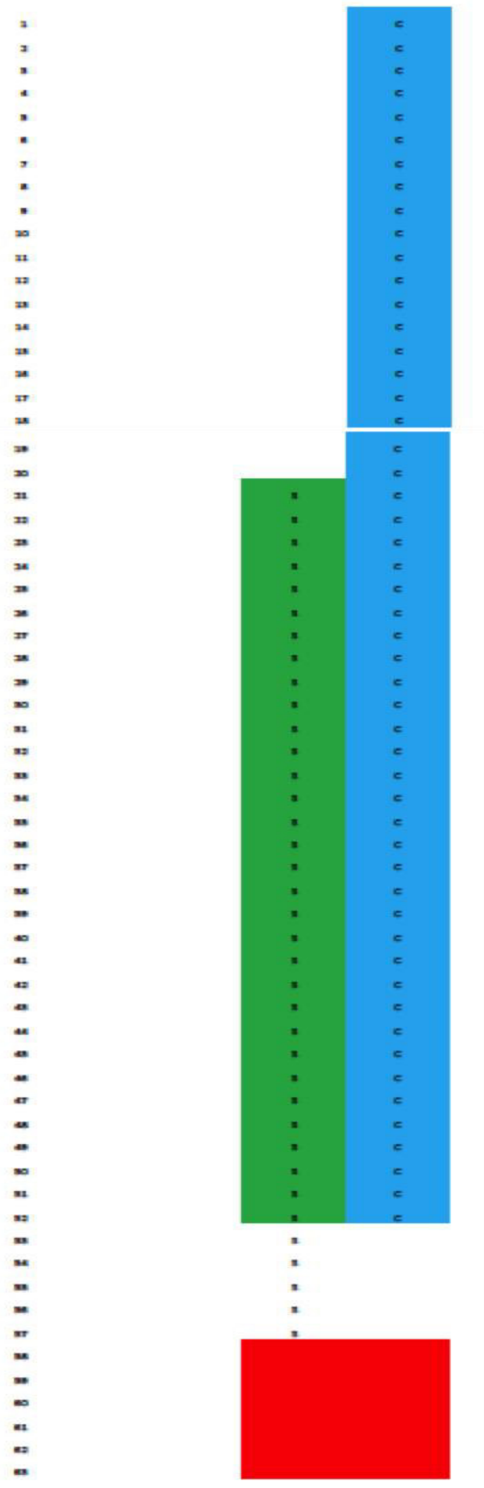
37 - 5 = 32 beberam café e sumo

Resolução S9A10 (6.º ano)

Se estavam 63 pessoas no buffet e 6 não beberam sumo nem café, foram 57 as que beberam sumo e/ou café.

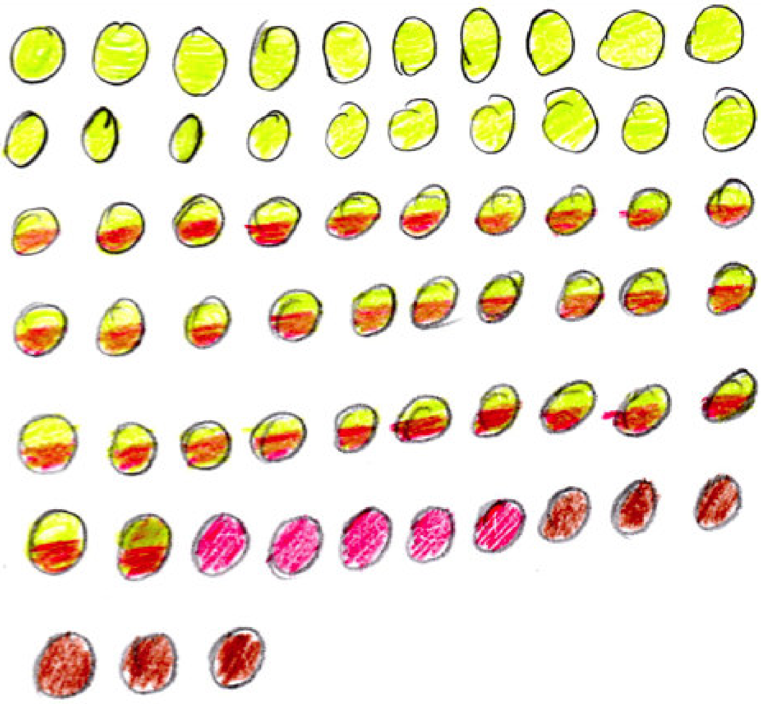
Se 52 beberam café, existiram 5 que só beberam sumo.

Daqui verifica-se que das 37 pessoas que beberam sumo houve 32 pessoas que beberam sumo e café.



Resposta: 32 pessoas beberam sumo e café

Resolução S10A10 (6.º ano)



Legenda:

= Pessoas que beberam só chá. - 6

= Pessoas que beberam só café. - 20

= Pessoas que beberam só sumo. - 5

= Pessoas que beberam sumo e também café. - 32

R: 32 pessoas pessoas beberam sumo e também café.

Anexo 2 – Resoluções do problema 7:
fase de apuramento da edição 2012/13

Resolução S1A7 (5.º ano)

1.Li enunciado até o perceber.

2.Quando fui lendo tirei os seguintes dados:

-Há 20 cadeados e 20 chaves, baralhados;

-Cada chave só corresponde a um cadeado;

3.Expermentar uma chave é o mesmo que fazer uma tentativa;

4.Quero saber:" Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?".

5.Por ser mais fácil, comecei a trabalhar com um número pequeno de chaves e igual ao número de cadeados.

6.Fui aumentando o número de chaves e d cadeados e organizei tudo numa tabela.

7.A tabela fica assim:

Chaves e cadeados	Tentativas	Soma das Tentativas
1	0	0
2	1	1
3	2+1	3
4	3+2+1	6
5	4+3+2+1	10
6	5+4+3+2+1	15
7	6+5+4+3+2+1	21
8	7+6+5+4+3+2+1	28
9	8+7+6+5+4+3+2+1	36
10	9+8+7+6+5+4+3+2+1	45
11	10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	55
12	11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	66
13	12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	78
14	13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	91
15	14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	105
16	15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	120
17	16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	136
18	17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	153
19	18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	171
20	19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	190

8.Em resumo, a resposta ao problema é : O mínimo de tentativas que terei de fazer para ter a certeza que cada chave descobriu o seu cadeado são 190 tentativas.

Resolução S2A7 (6.º ano)

Resolução do problema nº 7

Para facilitar a maneira de descobrir a resposta do problema, utilizei várias tentativas. Comecei pela maneira mais fácil, fiz como se tivéssemos 2 cadeados e 2 chaves e fui continuando assim o processo ao acrescentar mais números de cadeados e chaves. Para isso fiz uma "tabela"...

Nº de cadeados e de chaves	nº de tentativas
2	1
3	2 + 1
4	3 + 2 + 1
5	4 + 3 + 2 + 1
20	19 + 18 + 17 ... + 1

Temos que entender que para fazer o número de tentativas, temos que acrescer o número que tentativas das experiências anteriores... Assim quando chegarmos ao número 20 (vinte cadeados, vinte chaves), apenas temos que somar o número que todas as tentativas anteriores.

Eu tenho a minha maneira de somar muitos números que irão dar grandes quantidades, espero que percebam a maneira que utilizo.

Temos que fazer:

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19

$$\frac{1+19}{2} \text{ X } 19 = 190$$

R: Na pior das hipóteses, serão feitas 190 tentativas.

Resolução S3A7 (6.º ano)

Resposta:

Primeiro pensámos em experimentar as chaves para cada um dos cadeados. No primeiro descobrimos que teriamos de experimentar pelo menos 19 chaves para ter a certeza que a chave era a certa. No segundo teriam de se experimentar 18 chaves e era sempre assim.

	Cadeados																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Chaves	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**2**	
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	**3**		
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**			
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	**5**				
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	**6**					
	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	**7**						
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	**8**							
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	**9**								
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**10**									
	11	11	11	11	11	11	11	11	11	**11**										
	12	12	12	12	12	12	12	12	**12**											
	13	13	13	13	13	13	13	**13**												
	14	14	14	14	14	14	**14**													
	15	15	15	15	15	**15**														
	16	16	16	16	**16**															
	17	17	17	**17**																
	18	18	**18**																	
	19	**19**																		
	20																			
Tentativas	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Depois de somarmos todas as tentativas descobrimos que seriam precisas 190 tentativas para descobrir todas as chaves e cadeados.

Resolução S4A7 (6.º ano)

1. Li e compreendi

2. Dados: dos e 20 chaves.

Cada chave abre um cadeado

3. Questão: Na pior da hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

4. Tabela:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	X
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	X	X
3	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	X	X	X
4	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	X	X	X	X
5	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	X	X	X	X	X
6	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	X	X	X	X	X	X
7	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	X	X	X	X	X	X	X
8	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	X	X	X	X	X	X	X	X
9	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	X	X	X	X	X	X	X	X	X
10	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
11	146	147	148	149	150	151	152	153	154	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
12	155	156	157	158	159	160	161	162	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
13	163	164	165	166	167	168	169	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
14	170	171	172	173	174	175	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
15	176	177	178	179	180	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
16	181	182	183	184	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
17	185	186	187	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
18	188	189	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
19	190	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
20	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

5. Contagem: 190

6. Resposta: 190 tentativas.

Resolução S5A7 (6.º ano)

Chaves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Cadeados																					
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		19 T
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			18 T
3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X				17 T
4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X					16 T
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						15 T
6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X							14 T
7	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X								13 T
8	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X									12 T
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X										11 T
10	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X											10 T
11	X	X	X	X	X	X	X	X	X												9 T
12	X	X	X	X	X	X	X	X													8 T
13	X	X	X	X	X	X	X														7 T
14	X	X	X	X	X	X															6 T
15	X	X	X	X	X																5 T
16	X	X	X	X																	4 T
17	X	X	X																		3 T
18	X	X																			2 T
19	X																				1 T
20																					0 T

19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1+0= 190 T

T= tentativas

Resposta Na pior das hipóteses, o mínimo de tentativas são 190.

Resolução S6A7 (6.º ano)

Para descobrir o número mínimo, na pior das hipóteses, de tentativas, elaborei a tabela seguinte:

Nº de cadeados 	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
19 tentativas																				x
18 tentativas																			x	
17 tentativas																		x		
16 tentativas																	x			
15 tentativas																x				
14 tentativas															x					
13tentativas														x						
12 tentativas													x							
11tentativas												x								
10tentativas											x									
9tentativas										x										
8 tentativas									x											
7tentativas								x												
6 tentativas							x													
5 tentativas						x														
4 tentativas					x															
3 tentativas				x																
2 tentativas			x																	
1 tentativa		x																		
0tentativa	x																			

TOTAL das tentativas na pior das hipóteses:

19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=

=190 (cento e noventa tentativas)

Resolução S7A7(6.º ano)

	CAD 1	CAD 2	CAD 3	CAD 4	CAD 5	CAD 6	CAD 7	CAD 8	CAD 9	CAD 10	CAD 11	CAD 12	CAD 13	CAD 14	CAD 15	CAD 16	CAD 17	CAD 18	CAD 19	CAD 20
CH 1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√
CH 2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-
CH 3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-
CH 4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-
CH 5	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-
CH 6	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-
CH 7	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-
CH 8	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-
CH 9	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 11	x	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 12	x	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 13	x	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 14	x	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 15	x	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 16	x	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 17	x	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 18	x	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 19	x	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CH 20	√	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

tentativa
acerto
já usada

Considerei que a MELHOR das hipóteses seria acertar, logo à primeira tentativa, com pares cadeado-chave certos (20x). De contrário,

na PIOR das hipóteses, o mínimo de tentativas <u>para abrir</u> os cadeados são {[(20x20)-20]/2}+20=210 tentativas

(mínimo de tentativas porque pressupõe que cada chave, que "não sirva", <u>não volta</u> a ser utilizada novamente num mesmo cadeado).

PORÉM, "<u>para associar</u> cada chave ao respectivo cadeado" são apenas: 210 tentativas MENOS 20 acertos = <u>190</u>

(por exemplo, no CAD 1 são necessárias 19 tentativas e, mesmo não fazendo o 20.º teste, sabe-se que esta chave que sobra é a certa!)

Resolução S8A7 (6.º ano)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1																				√	19
2																			√		18
3																		√			17
4																	√				16
5																√					15
6															√						14
7														√							13
8													√								12
9												√									11
10											√										10
11										√											9
12									√												8
13								√													7
14							√														6
15						√															5
16					√																4
17				√																	3
18			√																		2
19		√																			1
20	√																				0

– errado, a chave não cabe; √ - certo, a chave cabe no cadeado; - não necessário de fazer tentativas

Soma de tentativas: 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **190**

Ou: somando o primeiro e o último, segunda e o penúltimo etc., que dão sempre 20. A média são 9,5 =>

20 x 9,5 = **190** – q.e.d. – quod erat demonstrandum (o que era para comprovar)

Esta solução é certa se nem experimentamos se a chave cabe no último cadeado disponível. Se temos que comprovar que a chave cabe mesmo, seriam mais 20 = 210 tentativas.

Resolução S9A7 (6.º ano)

Problema: Fechado a cadeado

Numa gaveta temos 20 cadeados e 20 chaves. Cada chave abre um e um só cadeado mas não sabemos que chave corresponde a cada cadeado. Para associar cada chave ao cadeado que lhe corresponde teremos de proceder por tentativas. Suponhamos então que uma tentativa significa experimentar uma chave num cadeado.
Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

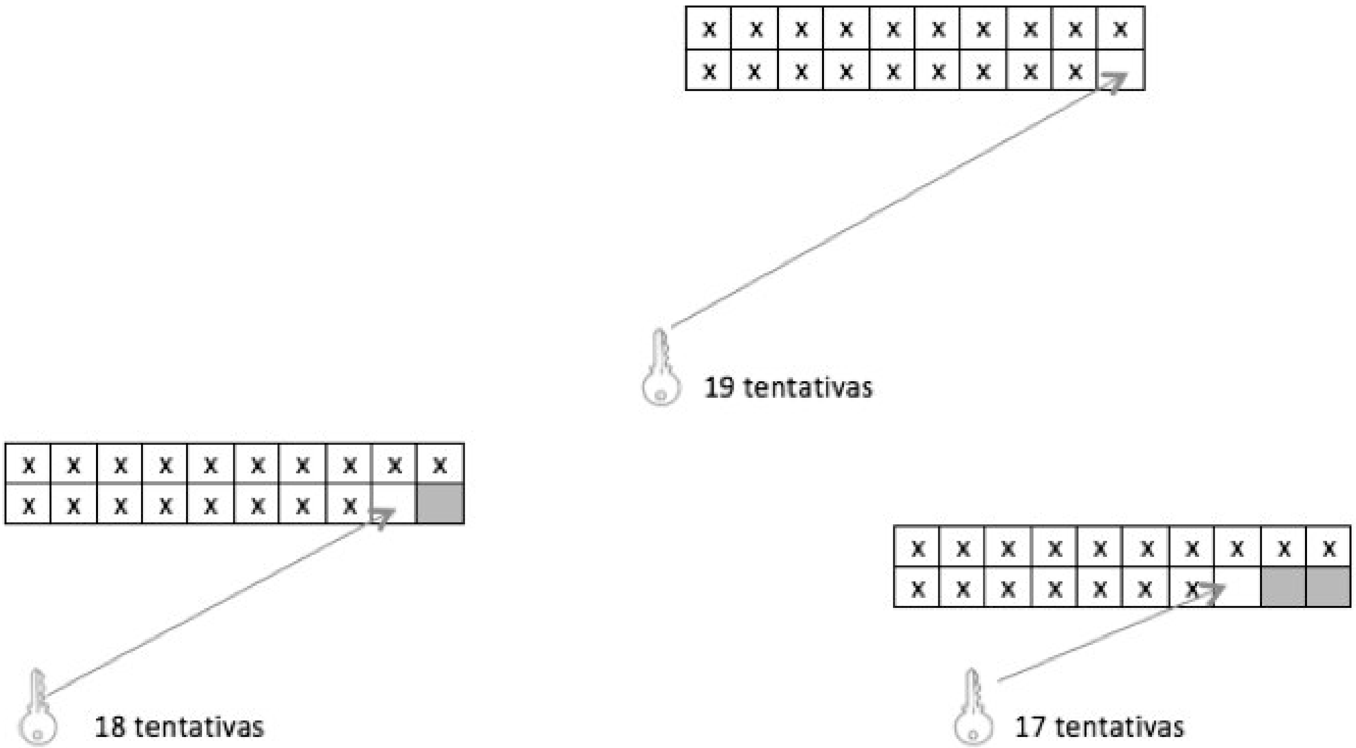
Resposta:

1.- Para resolver o problema, recolhi o número de cadeados. Depois vi que o pior das hipoteses para descobrir a chave correspondente a um cadeado, em 20 cadeados era 19 tentativa;
2.- Para abrir o 2º cadeado tinha de fazer a mesma coisa com 19 cadeados e na pior das hipoteses tinha de fazer 18 tentativas e assim sucessivamente.
3-Até ficar com dois cadeados, e na pior das hipoteses fiz apenas 1 tentativa. Depois somei tudo, dando 190 tentativas.
4- Somei com o computador, mas outra das maneiras de o fazer era :
19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =
= (19 + 1) + (18 + 2) + (17 + 3) + (16 + 4) + (15 + 5) + (14 + 6) + (13 + 7) + (12 + 8) + (11 + 9) + 10 =
= 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 10 =
=20 x 9 + 10 =
=180 + 10=
= 190

numero minimo de tentativas	190

Cadeados	Maximo de tentativas
20	19
19	18
18	17
17	16
16	15
15	14
14	13
13	12
12	11
11	10
10	9
9	8
8	7
7	6
6	5
5	4
4	3
3	2
2	1
1	

Resolução S10A7 (6.º ano)



Como vi que ia sempre diminuindo 1, e eram 20 chaves, fui diminuindo 1 20 vezes.

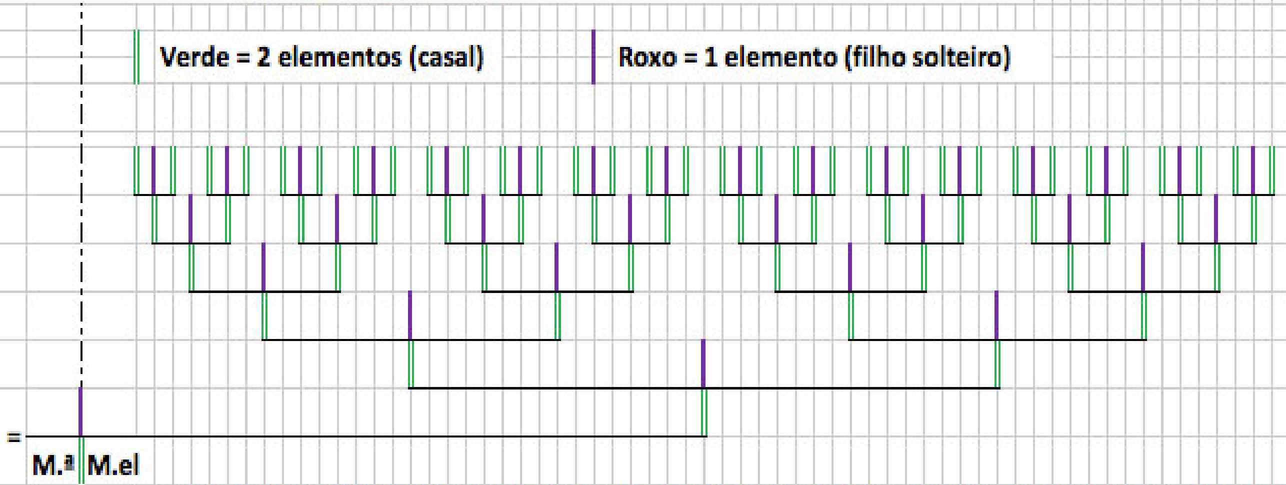
19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=190 tentativas

Anexo 3 – Resoluções do problema 10 fase de apuramento da edição 2011/12

Resolução S1B10 (5.º ano)

ÁRVORE GENEALÓGICA

Noras	Filhos	Gerações	Elem.
62x2=64	32x3=96	7ª	160
16x2=32	16x3=48	6ª	80
8x2=16	8x3=24	5ª	40
4x2=8	4x3=12	4ª	20
2x2=4	2x3=6	3ª	10
2	3	2ª	5
-	-	1ª	2

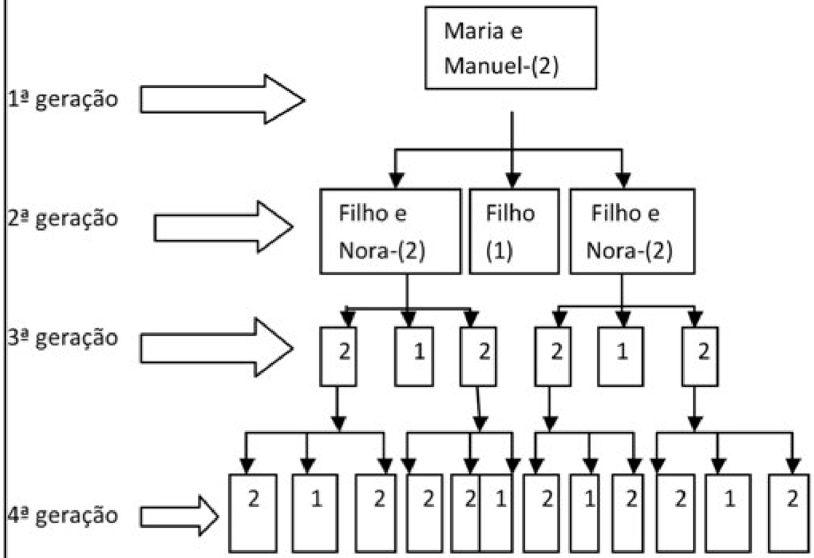


Aqui se mostra, em meia árvore (a partir de um dos filhos casados), como se chegou à 7ª geração
No gráfico, o total da 7ª geração é o somatório dos dois filhos casados de Maria e Manuel

Assim, a 7ª geração da Familia M e M é composta por 160 elementos

Resolução S2B10 (5.º ano)

Resolução do problema 10



....

Legenda:
Cada quadrado mostra o Nº dos filos de cada geração anterior;
Cada número dentro de cada quadro demonstra:
1-só o filho que ficou solteiro;
2-um casal (um Filho e uma Nora)
Resolução:

- ✓ 1ª geração são 2 elementos- Maria e Manuel;
- ✓ 2ª geração são 5 elementos-3 filhos e 2 noras, porque só dois filhos casaram;
- ✓ 3ª geração são 10 elementos, ou seja:
    - ➢ 2 casais com 3 filhos e 2 noras para cada um dos casais: 2X(3+2)=2x5=10 elementos;
- ✓ 4ª geração são 20 elementos, ou seja também 3 filhos e 2 noras para cada um dos 4 casais de 3ª geração:
    - ➢ 4 casais com 3 filhos e 2 noras para cada um dos casais: 4x(3+2)=4x5=20 elementos;

Assim, continua aumentar consequentemente o número de elementos das gerações descendentes da Maria e Manuel. Uma parte de árvore genealógica acima demonstrada que com cada uma geração seguinte, mantendo a mesma descendência de cada um casal ter 3 filhos, dois dos quais casados e um fica solteiro, o número dos elementos aumenta duas vezes mais do que cada geração anterior, como:
A 1ª geração são 2 elementos (um casal)
A 2ª geração teve 5 elementos incluindo maridos e mulheres;
A 3ª geração – 2x5=10 elementos;
A 4ª geração - 2x10=20 elementos;
A 5ª geração – 2x20=40 elementos;
A 6ª geração – 2x40=80 elementos;
A 7ª geração – 2x80=160 elementos;

A 7ª geração desta família tem 160 elementos incluindo maridos e mulheres.

Resolução S3B10 (5.º ano)

Problema 10: "Árvore Genealógica"

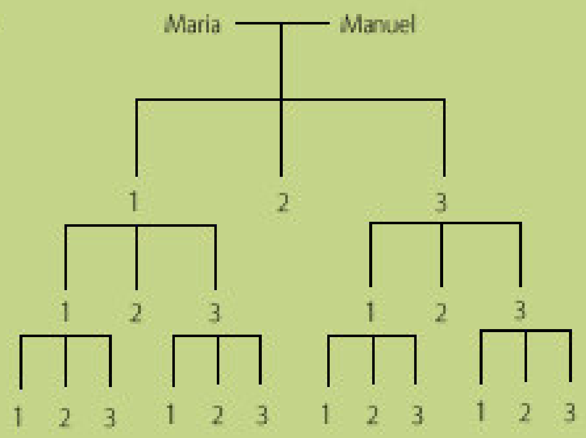
Primeiro, começámos por fazer um esquema com todas as gerações da família, sabendo que a Maria e o Manuel eram a primeira geração da família e que tinham tido três filhos, dos quais dois casaram e tiveram, cada um deles, também dois filhos. Sabíamos também que de geração em geração se foi mantendo a mesma descendência e que as gerações eram constituídas por maridos e mulheres, assim:

1.ª Geração – 1 homem + 1 mulher = 2 pessoas

2.ª Geração – 3 homens + 2 mulheres = 5 pessoas

3.ª Geração – 6 homens + 4 mulheres = 10 pessoas

4.ª Geração – 12 homens + 8 mulheres = 20 pessoas



Ao fazermos as quatro primeiras gerações, notámos que o número de homens, de mulheres e do total por cada geração era sempre o dobro. Sabendo isto, fizemos os seguintes cálculos:

2 pessoas – Número de pessoas da primeira geração

5 pessoas – Número de pessoas da segunda geração

5x2 = 10 pessoas – Número de pessoas da terceira geração

10x2 = 20 pessoas – Número de pessoas da quarta geração

20x2 = 40 pessoas - Número de pessoas da quinta geração

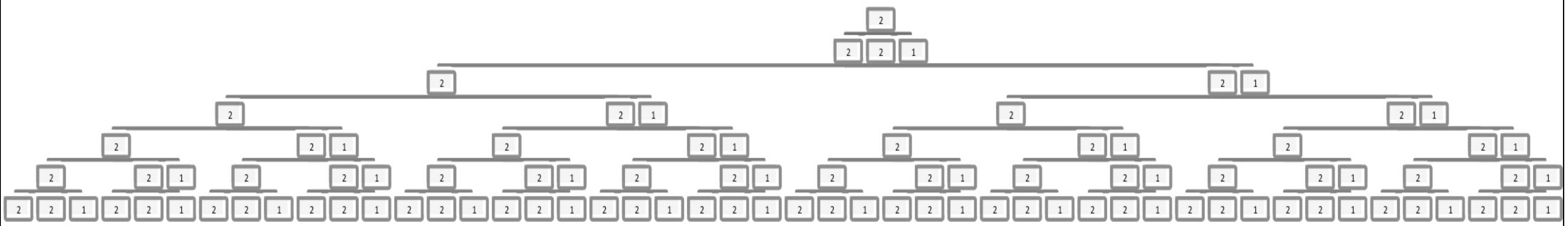
40 x 2 = 80 pessoas - Número de pessoas da sexta geração

80 x 2 = 160 pessoas – Número de pessoas da sétima geração

Resposta: O número total de pessoas da sétima geração da família da Maria e do Manuel é 160.

Resolução S4B10 (5.º ano)

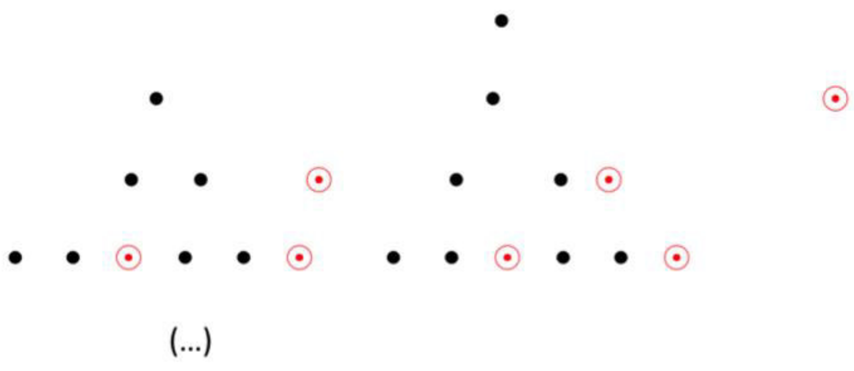
Resolução S5B10 (5.º ano)



80x2=160

R:. A 7ªgeração tem 160 elementos.

Resolução S6B10 (5.º ano)



1ª ger.	2	
2ª ger.	5	
3ª ger.	10	X2
4ª ger.	20	X2
5ª ger.	40	
6ª ger.	80	
7ª ger.	160	

LEGENDA: • CASAL ⊙ SOLTEIRO

Verifiquei que a partir da 2ª geração para a 3ª era o dobro, da 3ª para a 4ª também era, por isso posso concluir que passar para a próxima geração é sempre o dobro da anterior.

Na 7ª geração há 160 elementos.

Resolução S7B10 (6.º ano)

1ªGERAÇAO=P+M

2ªg=P+M+P+M+F=5

3ªG=PM+PM+PM+PM+F+F=10

4ªG=PM+PM+PM+PM+PM+PM+PM+PM=20

…

7ªG=160

Legenda:

P:pai

M:mae

F:filhos solteiros

Resolução S8B10 (5.º ano)

1. Li o enunciado até o compriender.

2. Retirei os dados:

A Maria e o Manuel casaram e tiveram três filhos;
Dos três filhos, dois casaram;
Cada um dos casados teve igualmente três filhos, dos quais dois casaram;
De geração em geração manteve-se a mesma descendência e o número de casamentos.

3. Retirei o que me é pedido:

Considerando que a 1ª geração é composta pelo casal Manuel e Maria e que cada uma das gerações seguintes inclui maridos e mulheres, **determina quantos elementos tem a 7ª geração desta família**

4. Resolução:

1ª geração - A Maria e o Manuel casaram = **2 elementos**

2ª geração - Tiveram 3 filhos e 2 casaram = 3 + 2 = **5 elementos**

3ª geração – 4 casais, e 2 solteiros = 8 + 2 = **10 elementos**

4ª geração – 8 casais, e 4 solteiros = 16 + 4 = **20 elementos**

5ª geração – 16 casais, e 8 solteiros = 32 + 8 = **40 elementos**

6ª geração – 32 casais, e 16 solteiros = 64 + 16 = **80 elementos**

7ª geração – 64 casais, e 32 solteiros = 128 +32 = **160 elementos**

5.Resposta:

A partir da 2ª geração os número de elementos duplica em relação à geração anterios.
Assim a 7ª geração tem (3+2) x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 160

A 7ª geração desta familia tem 160 elementos.

Resolução S9B10 (5.º ano)

-1ª Geração - Manuel + Maria					
	Casados/Mulheres				Solteiros
-2ª Geração -	2	x	2	+	1
-3ª Geração -	4	x	2	+	2
-4ª Geração -	8	x	2	+	4
-5ª Geração -	16	x	2	+	8
-6ª Geração -	32	x	2	+	16
-7ª Geração -	64	x	2	+	32 = 160 elementos

Resolução S10B10 (6.º ano)

Sub 12

Problema 10 - Árvore geneológica

Nº de elementos	Geração
2	1
5	2
10	3
20	4
?	7

$7 - 4 = 3$

$20 \times 2 \times 2 \times 2 = 160$ ou $20 \times 2^3 = 160$

$? = 160$

Para resolver o problema, calculei o nº de elementos de cada geração até à 4ª geração que tinha 20 elementos. Depois saltei logo para a 7ª geração que calculei a 7ª geração menos a 4ª geração- $7 - 4 = 3$. De seguida calculei o nº de elementos da 4ª geração a multiplicar pelo dobro 3 vezes que me deu os 160 que correspondia ao nº de elementos na 7º geração.

R:.A 7ª geração desta família tem 160 elementos.

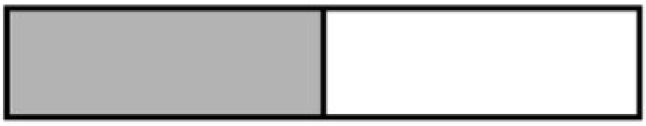
Anexo 4 – Resoluções do problema 9:
fase de apuramento da edição 2011/12

Resolução S1B9 (6.º ano)

Espaço no disco livre

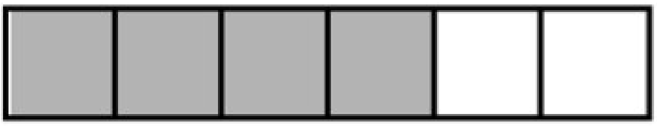
Espaço no disco <u>consumida</u> / <u>livre</u>

1.ºdia



$\frac{1}{2}$ (desenho)

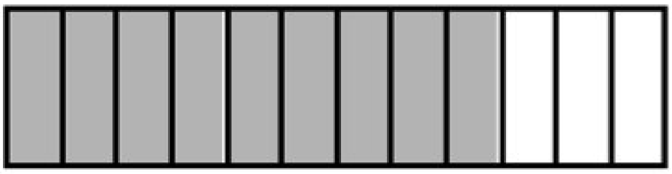
2.ºdia



$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{6}$ (desenho)

|................ $\frac{1}{2}$ ....| $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

3.ºdia

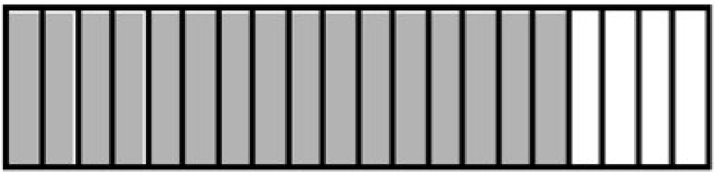


$\frac{4}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}=\frac{18}{24}=\frac{9}{12}$

(desenho)

|..................... $\frac{4}{6}$ ....| $\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}$

4.ºdia



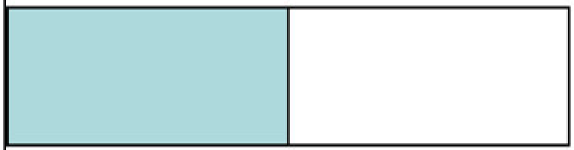
$\frac{9}{12}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{12}=\frac{48}{60}=\frac{16}{20}$

(desenho)

|........................ $\frac{9}{12}$ ....| $\frac{1}{5}\times\frac{3}{12}$

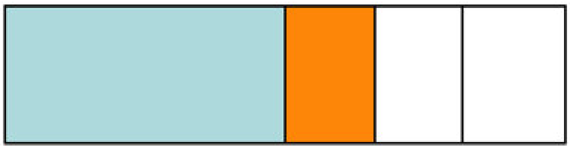
Resposta: a fracção consumida foi $\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

Resolução S2B9 (6.º ano)



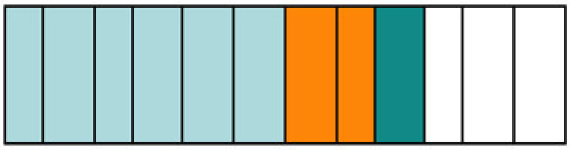
1º Dia

½



2º Dia

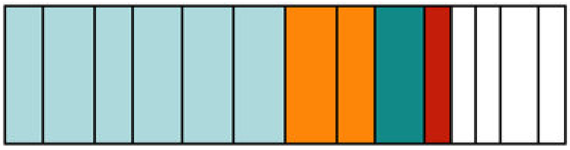
1/3 x ½ = 1/6



3º Dia

¼ x 2/6 = 2/24:2

= 1/12 simplificar



4º Dia

1/5 x 3/12 = 3/ 30 : 3 =

1/20 simplificar

Total de espaço ocupado pelo vírus:

½ + 1/6 + 1/12 + 1/20 = 30/60 + 10/60 + 5/60 + 3/60 =

(x 30) (x 10) (x 5) (x 3)

48/60 : 12 = 4/5

simplificar

Resolução S3B9 (5.º ano)

	1ºdia	2ºdia	3ºdia	4ºdia
Ocupou	1/2	1/3 x 1/2 = 1/6 1/2 + 1/6 = 4/6 (x3)	1/4 x 1/3 = 1/12 4/6 + 1/12 = 9/12 = 3/4 (x2)	1/5 x 1/4 = 1/20 3/4+1/20= 16/20= 4/5
Ficou Livre	1/2	2/6 = 1/3	1/4	1/5
R: 4/5				

Resolução S4B9 (5.º ano)

Dias	Consumido	Sobrou
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$
3	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$	$\frac{2}{6}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}$
4	$\frac{3}{12}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$	$\frac{3}{12}-\frac{1}{20}=\frac{15}{60}-\frac{3}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

Total Consumido

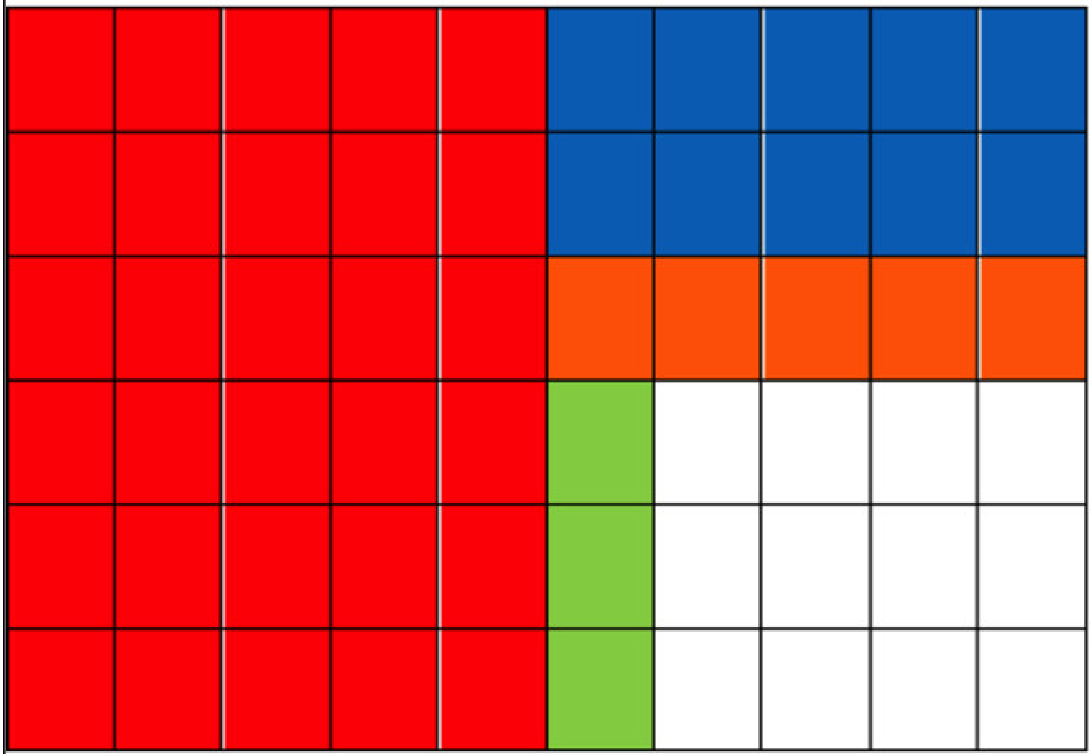
$$\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

Resolução S5B9 (6.º ano)

$\frac{1}{2} + (1/3 * 1/2) + (1/4 * 1/3) + (1/5 * 1/4)$
$= \frac{1}{2} + 1/6 + 1/12 + 1/20 = 30/60 + 10/60 + 5/60 + 3/60$
$= 48/60 = 24/30 = 12/15 = 4/5$
O espaço que o vírus consumiu foi 4/5.

Resolução S6B9 (6.º ano)

total de 60 quadrados (mmc entre 2, 3, 4 e 5)



- A vermelho pintámos a porção que foi afetada pelo vírus, que foi 1\2 do espaço livre do disco rígido (30 quadrados)

Restou metade ou 1\2 = 30 quadrados.

- A **azul** pintámos 1\3 da parte livre do disco (30) que corresponde a 10 quadrados.

Restou 2/3 de 30 = 20 quadrados.

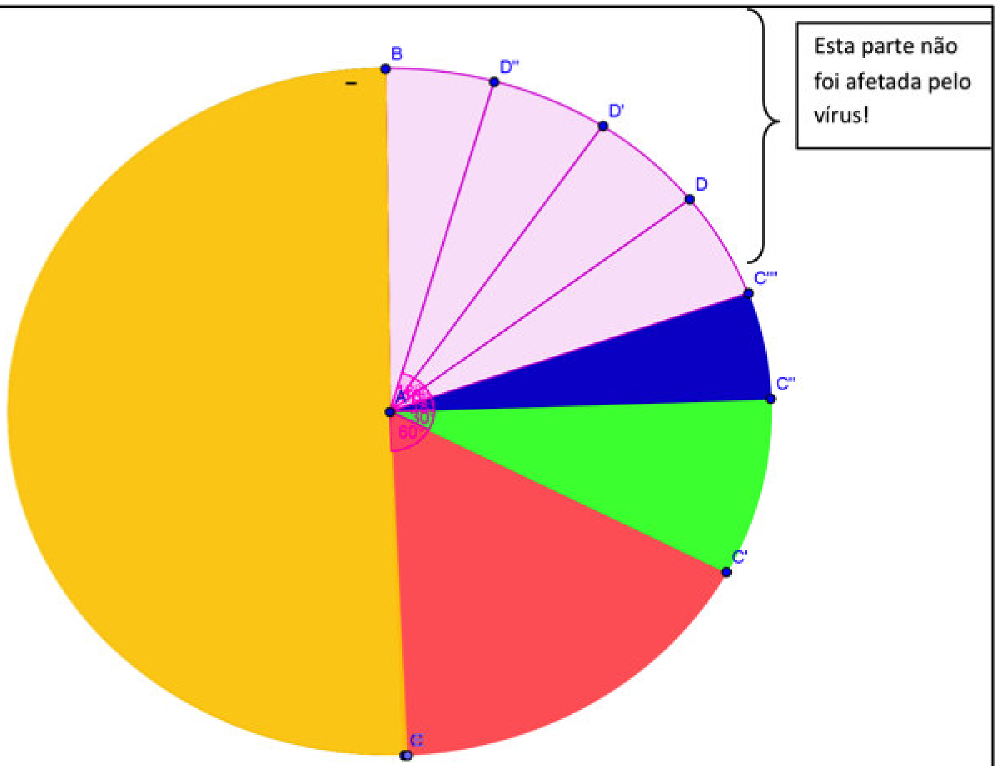
- A laranja pintámos 1\4 da parte livre do disco (20 quadrados), que corresponde a 5 quadrados.

Restou ¾ de 20 = 15 quadrados.

- A **verde** pintámos 1\5 da parte livre do disco (15 quadrados), que corresponde a 3 quadrados.

Restou 12/60 do disco, ou seja, 1/5. Concluímos então que 4/5 da parte do disco foi infetada pelo vírus informático.

Resolução S7B9 (5.º ano)



1º dia $\frac{1}{2}$ (180 graus)

2º dia $\frac{1}{3}$ de metade (180:3= 60 graus)

3º dia $\frac{1}{4}$ de dois terços (120:4= 30 graus)

4º dia $\frac{1}{5}$ de três quartos (90:5= 18 graus)

Foi consumido 180 + 60 + 30 + 18 = 288 graus (80% do disco) 288:360= 0,8 x 100= 80%

Ficou livre do vírus 20% do disco.

Resposta: Foi consumida pelo vírus 80%, ou seja $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Resolução S8B9 (5.º ano)

O retângulo exterior na figura representa o espaço do disco.

Foram escolhidos 120 retângulos porque o vírus ataca sempre parte do espaço livre

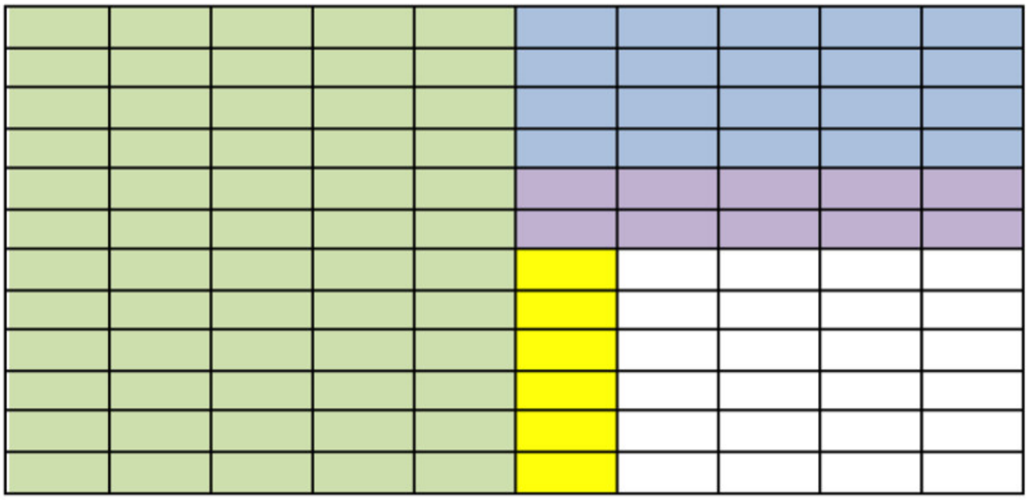
½ no primeiro dia do espaço livre.

1/3 do espaço ainda livre.

¼ do espaço ainda livre.

1/5 do espaço ainda livre.

Como 2x3x4x5 = 120. É mais fácil representar o esquema com essas divisões.



Sobrou $\frac{24}{120} = \frac{12}{60} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

R.: A fração do disco consumida nestes dias foi $\frac{4}{5}$.

Resolução S9B9 (5.º ano)

Como ainda não demos as fracções vou fazer doutra forma. O disco rígido sem estar afectado tinha 100% de capacidade livre. Vou partir do princípio que 100 é a capacidade do disco.

No primeiro dia vírus ocupou metade do disco.

100:2=50, 100-50=50

No segundo dia o vírus ocupou um terço de 50.

50:3=16,66, 50,00-16,66=33,33

No terceiro dia ocupou um quarto de 33,33.

33,33:4=8,33, 33,33-8,33=25

No quarto dia ocupou um quinto de 25.

25:5=5, 25-5=20%

20% foi a parte que não foi ocupada pelo vírus ou seja: o vírus ocupou o restante.

100-20=80%

R:O vírus ocupou 80% do disco, ou seja 4/5.

Resolução S10B9 (5.º ano)

Numa escala de 0 a 12cm.

Um disco rígido ocupa 100%. No 1º dia foi ½ do disco 6cm, no 2º dia foi 1/3 2cm, no 3º dia foi ¼ do disco 1cm, no 4º dia foi 1/5 do disco 0,6cm.

Ocupou 9,6cm

Anexo 5 – Resoluções do problema 10: fase de apuramento da edição 2010/11

Resolução S1C10 (5.º ano)

198:3= 66

Se todos tivessem o
mesmo nº de berlindes
tinham 66 berlindes

Pedro	Joana	David
66	66	66
	: 3	
	22	11
	: 2	

66+22+11=99

$$\begin{array}{r} 66 \\ 22 \\ +\ 11 \\ \hline 99 \end{array}$$

198-99=99

$$\begin{array}{r} 198 \\ -\ \ 99 \\ \hline 99 \end{array}$$

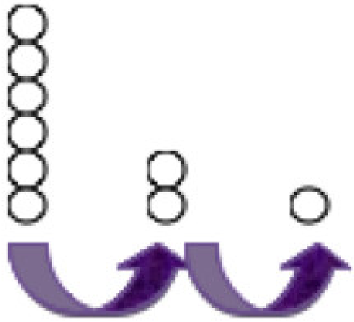
Sobram 99 berlindes
(metade dos berlindes), logo
cada um vai ficar com o
dobro do que aquilo que eu
representei anteriormmente.

Pedro
66x2= 132

Joana
22x2=44

David
11x2=22

Resolução S2C10 (65º ano)



= 9

198 * 9= 22

22 * 2= 11

198-99= 99

11+11= 22

22 X 3= 66

66 + 22+11= 99

22+22= 44

66+66= 132

Joana = 44 Pedro = 132 David = 22

A Joana tem 44, porque ela tem mais berlindes do que o David e tem menos do que o Pedro.

O Pedro tem 132, porque ele tem mais berlindes do que os outros.

O David tem 22, porque tem menos berlindes do que os outros.

Resolução S3C10 (5.º ano)

A Joana tem x berlindes. O Pedro tem $3x$ berlindes. O David tem $\frac{x}{2}$ berlindes.

E os 3 amigos têm 198 berlindes

Então:

$x + 3x + \frac{x}{2} = 198$ que é o mesmo que:

$\frac{x}{1} + \frac{3x}{1} + \frac{x}{2} = 198$. Agora vamos colocar tudo com o mesmo denominador (2)

E fica $\frac{2x}{2} + \frac{6x}{2} + \frac{x}{2} = 198$

Então $\frac{9x}{2} = 198$

Vamos dividir por 2 e fica $4{,}5\,x = 198$

$x = \frac{198}{4{,}5}$ que vai dar 44

A Joana tem 44 berlindes.

Como o Pedro tem 3 vezes mais berlindes que a Joana, ele tem $3 \times 44 = 132$ berlindes.

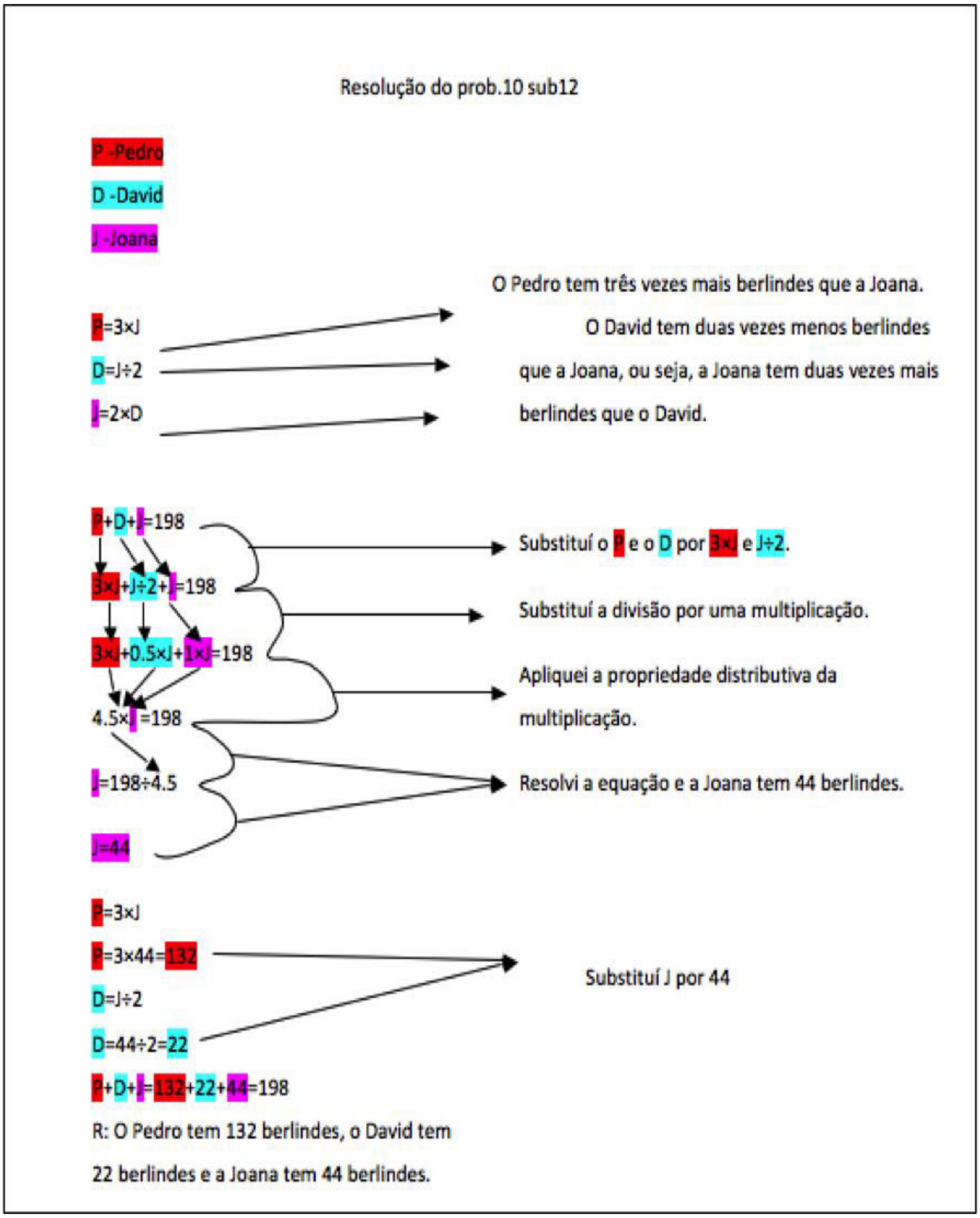
Como o David tem 2 vezes menos berlindes que a Joana, ele tem $44 : 2 = 22$ berlindes.

Resposta: A Joana tem 44 berlindes, o Pedro tem 132 berlindes e o David tem 22 berlindes.

Resolução S4C10 (5.º ano)

Resposta: A Jogar ao berlinde: Pedro(P)+ David(D)+Joana(J)=198
P= 3xJ D=0.5 J Vamos substituir na formúla inicial 3J+ 0.5J+ J=198
Resolvendo temos J(3+0.5+1)=198 J=198/4.5=44 Berlindes Pelo que:
P=3J P=3X44=132 berlindes e D=0.5J D=0.5X44=22 berlindes

Resolução S5C10 (6.º ano)



Resolução do prob.10 sub12

P -Pedro

D -David

J -Joana

P=3×J

D=J÷2

J=2×D

O Pedro tem três vezes mais berlindes que a Joana.

O David tem duas vezes menos berlindes que a Joana, ou seja, a Joana tem duas vezes mais berlindes que o David.

P+D+J=198

3×J+J÷2+J=198

3×J+0.5×J+1×J=198

4.5×J =198

J=198÷4.5

J=44

Substituí o P e o D por 3×J e J÷2.

Substituí a divisão por uma multiplicação.

Apliquei a propriedade distributiva da multiplicação.

Resolvi a equação e a Joana tem 44 berlindes.

P=3×J

P=3×44=132

D=J÷2

D=44÷2=22

Substituí J por 44

P+D+J=132+22+44=198

R: O Pedro tem 132 berlindes, o David tem 22 berlindes e a Joana tem 44 berlindes.

Resolução S6C10 (5.º ano)

Para descobrirmos a resposta a este problema lemos com atenção o enunciado e tirámos as seguintes conclusões:

1º O David é o menino com menos berlindes;

2º A Joana tem o dobro dos berlindes do David;

3º O Pedro tem o triplo dos berlindes da Joana que tem o dobro do David, logo o Pedro tem seis vezes mais berlindes que o David.

Então concluímos que os berlindes estão divididos pelos amigos em nove partes iguais: 1/9 é do David; 2/9 é da Joana e 6/9 são do Pedro.

Podemos fazer:
198 : 9 = 22 e concluímos que:
- o David tem 22 berlindes;
- a Joana 22x2=44;
- o Pedro 22x6=132.

Ou então também podíamos fazer os cálculos utilizando as fracções:

- David - 1/9 x 198 = 22
- Joana - 2/9 x 198 = 44
- Pedro - 6/9 x 198 = 132

Resolução S7C10 (6.º ano)

198:9=22

22=David 22X2=44=Maria 22X6=132=Pedro

Resposta: 22=David; 44=Maria; 132=Pedro.

Resolução S8C10 (6.º ano)

Eu cheguei a esta conclusão:

PEDRO>JOANA>DAVID

_____X3=______X2=___________

= 198 BERLINDES

Depois fiz um bolo que no total era 198 berlindes e dividi-lo pela sequência que o David tinha uma parte, logo a Joana tinha 2 partes e logo o Pedro tinha 3 vezes mais partes que a Joana= 6partes.

Depois cheguei à minha resposta por razões.

198:9=22 (berlindes de cada fatia)

E multipliquei 22 por 2 no caso da Joana e 22 por 6 no caso do Pedro que dá o total de berlindes de cada um. Pelo David não multipliquei por nada porque ele só tinha uma fatia, logo tinha 22 berlindes.

Resolução S9C10 (6.º ano)

1º- Lemos o problema
2º- Retiramos os dados
3º- Resolvemos o problema
4º- Fizemos uma tabela
5º- Demos a resposta
6º- Verificámos a resposta

A resolução deste problema requer uma tabela, para realizarmos por tentativas!

Joana	Pedro 3x a Joana	David Joana : 2	Total	Decisão
40	3x40=120	40:2=20	40+120+20=180	Não dá! É muito pouco!
48	48x3=144	48:2=24	48+144+24=216	Não dá! É muito!
44	44x3=132	44:2=22	44+132+22=198	É este! É o número 44!

Esta coluna representa os números de cada tentativa!

R.: -A Joana ficou com 44 berlindes.
-O David ficou com 22 berlindes.
-O Pedro ficou com 132 berlindes.

Resolução S10C10 (5.º ano)

Primeiro fiz por tentativas.

No total os amigos têm 198 berlindes.

198= Pedro 3x mais que a Joana – David 2x menos que a Joana.

Se o David tem 2x menos que a Joana, logo a Joana tem 2x mais que o David.

As diversas tentativas:

DAVID	JOANA	PEDRO
20 X 2=	40 X 3=	120
21 X2 =	42 X 3=	126
22 X 2=	44 X3=	132

20+40+120=180

21+40+126=187

22+44+132=198

O Pedro tem 132 berlindes.

A Joana tem 44 berlindes.

O David tem 22 berlindes.

Anexo 6 – Guião de entrevista para alunos participantes

Tópicos	Questões
Introdução	Esta entrevista faz parte do trabalho de investigação que estou a desenvolver, relacionada com o campeonato de resolução de problemas SUB12, no âmbito do doutoramento em Didática da Matemática. Os nossos diálogos serão transcritos e será garantido o anonimato dos entrevistados.
Relação com a Resolução de Problemas	**1-** Certamente que gostas de matemática e mais especificamente de resolver problemas. O que te fascina nesta actividade? Explica porquê. **2-** Quando descobriste o gosto pela resolução de problemas? **3-** Sempre que surge um problema que não consegues resolver imediatamente, o que sentes? **3.1-** Qual é a tua preocupação? **4-** Quando pensa em problemas de matemática, qual das seguintes palavras está de acordo com o que sentes: 1 confusão, 2 inteligência, 3 ideias brilhantes e 4 adrenalina. Porquê?
A Matemática numa Vertente Competitiva	**5-** Tens participado em campeonatos de resolução de problemas? Quais? **5.1-** O que te leva a participar? O que te fascina? **6-** Qual a tua opinião sobre o SUB12? **6.1-** O que pensas dos problemas propostos? **7-** Participar no SUB12 é um desafio para ti? Porquê? **8-** Quando pensas em competição qual das seguintes palavras está de acordo com o que sentes: 1 ganhar, 2 ansiedade, 3 rivalidade, 4 satisfação. Porquê?
O SUB12 e o Conhecimento Matemático	**9-** Achas que esta atividade é importante para o teu desempenho na disciplina de matemática? Explica porquê. **10-** Para resolver os problemas do SUB12 é preciso conhecer conteúdos de matemática? Porquê? **11-** Ao resolveres problemas do SUB12, quais foram as maiores dificuldades que te surgiram? Indica-as. **12-** Durante a fase de apuramento tiveste ajuda na resolução de problemas? De quem? **13-** Quando pensas em matemática qual das seguintes palavras está de acordo com o que sentes: 1 números, 2 raciocínio, 3 beleza, 4 entusiasmo. Porquê?

Originalidade na Resolução de Problemas	**14-** Achas que um mesmo problema de matemática pode ter várias formas de resolução diferentes? És capaz de me dar um exemplo? Encontraste algum durante o campeonato SUB12? **15-** Preocupas-te em ser original nas tuas resoluções? Porquê? **16-** O que é para ti uma resolução original? **17-** Na disciplina de matemática o teu professor valoriza a originalidade dos alunos?
Representações na Resolução de Problemas	**18-** Achas importante, na resolução de problemas, usar apenas o cálculo, ou usar também esquemas, desenhos, tabelas, gráficos, figuras, quadros, destaques com cores, etc.? Porquê? **19-** Nas aulas de matemática sentes que estas diferentes formas de resolver problemas são valorizadas, sem recorrer apenas ao cálculo?
Raciocínio na Resolução de Problemas	**20-** O que é que te dá mais satisfação: encontrar a resposta ou a construção do raciocínio para chegar à resposta? **21-** Preferes os problemas que resolves mais facilmente ou aqueles que te fazem pensar mais? Porquê? **22-** Sempre que tentas resolver um problema continuas a pensar sobre ele ou preferes passar à resolução de outro diferente?
Aptidão na Resolução de Problemas	**23-** Achas que resolver problemas está ao alcance de todos os alunos ou apenas de alguns? Porquê? **24-** Na tua opinião o que tem de especial um aluno que é bom a resolver problemas?
Conclusão	Muito obrigada pela tua colaboração. O teu contributo será decerto muito importante para o progresso do estudo que estou a realizar.

Anexo 7 – Guião de entrevista para professores

Tópicos	Questões
Introdução	Esta entrevista faz parte do trabalho de investigação que estou a desenvolver, relacionada com o campeonato de resolução de problemas SUB12, no âmbito do doutoramento em Didática da Matemática. Os nossos diálogos serão transcritos e será garantido o anonimato dos entrevistados.
Importância e Utilização Pedagógica da Resolução de Problemas	**1-** A resolução de problemas é uma das capacidades transversais do Novo Programa de Matemática. Qual a importância desta capacidade transversal na sua prática? **2-** Nas aulas de matemática é frequente propor atividades de resolução de problemas ao longo de cada ano letivo? Em que situações? **2.1-** Em todos os conteúdos curriculares? Indique alguns exemplos. **3-** Considera que a resolução de problemas pode ser um meio para chegar à formalização matemática ou a formalização deverá ser prévia à resolução de problemas? **4-** Sempre que surge um problema que os seus alunos não conseguem resolver qual é a sua preocupação? **4.1**- Costuma ajudá-los? De que forma? **5-** Para si é mais gratificante que os alunos cheguem às respostas ou que elaborem os seus raciocínios? Porquê?
Originalidade na Resolução de Problemas	**6-** Durante a actividade de resolução de problemas com os seus alunos costuma encontrar diferentes tipos de resoluções para um mesmo problema? Criativas? Originais? **7-** O que é para si uma resolução original? **7.1**- E criativa? **7.2**- Considera a originalidade e a criatividade iguais, parecidas ou diferentes? **8-** Durante a correção dos problemas costuma utilizar as resoluções dos alunos ou é a professora que apresenta uma resolução? **9-** Costuma ficar surpreendida com as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução de problemas? Quando isso acontece qual é a sua reação? **10-** Considera que a matemática escolar incentiva os alunos a serem criativos e originais ou dá mais valor aos alunos rigorosos?

	Porquê? **11-** Como é que estimula a criatividade e a originalidade dos alunos na disciplina de matemática? **12-** Ao longo da fase de apuramento do SUB12 identificou atitudes ou formas de trabalhar especiais de alguns alunos? Pode indicar algumas?
Matemática numa Vertente Competitiva	**13-** Qual a sua opinião sobre o SUB12? **13.1**- Acha que esta actividade é importante para o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática? Explique porquê. **14-** O que pensa dos problemas propostos no SUB12? **15-** Considera que a Participação no SUB12 é um desafio para os alunos? Porquê? **15.1**-Costuma incentivar os seus alunos a participar neste tipo de campeonatos? Porquê? **16-** Acha que estes alunos que são bons na resolução de problemas são mais competitivos? Qual é a sua perceção?
SUB12 e o Conhecimento Matemático	**17-** Considera que para resolver os problemas do SUB12 é preciso que os alunos tenham conhecimento de conteúdos de matemática? Porquê? **18-** Quais foram as maiores dificuldades que detectou nos seus alunos, durante a resolução dos problemas do SUB12? Indique-as.
Aptidão na Resolução de Problemas	**19-** Como é que descreveria um aluno com grande aptidão na resolução de problemas? **20-** Considera que há alguma correspondência entre ser bom aluno em matemática e ser competente na resolução de problemas? **20.1-** Considera que os alunos competentes na resolução de problemas são os mais criativos e originais, quer em matemática quer nas outras áreas? **21-** Acha que um aluno que tem gosto pela resolução de problemas é diferente da maioria dos alunos ou não? Porquê? **22-** Acha que resolver problemas está ao alcance de todos os alunos ou apenas de alguns? Porquê?
Representações na Resolução de Problemas	**23-** Acha importante, na resolução de problemas, usar esquemas, desenhos, tabelas, gráficos, figuras, quadros, destaques com cores, etc.? Porquê?

	24- Costuma dar valor á apresentação/ilustração das respostas dos seus alunos mesmo que informais? Como?
Conclusão	Muito obrigada pela sua colaboração. O seu contributo é decerto muito importante para o progresso do estudo que estou a realizar.

Anexo 8 – Autorização para realização de entrevista aos Encarregados de Educação

Autorização para realização de entrevista

Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação.

Chamo-me Nuno Alexandre Rodrigues Amaral, sou professor de Matemática e Ciências da Natureza e venho por este meio pedir ao Encarregado de Educação do participante do Campeonato SUB12, ______________________________, n.º de camisola _____º, a sua participação numa entrevista vídeo/áudio. Esta entrevista faz parte do trabalho de investigação que estou a desenvolver, relacionada com o campeonato de resolução de problemas SUB12, no âmbito do meu Doutoramento em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação, da Universidade de Lisboa. O diálogo será transcrito e garantido o anonimato do entrevistado, bem como a confidencialidade de toda a informação recolhida. A participação será um grande contributo para o referido estudo.

O objectivo da investigação é estudar de que modo os participantes encaram este Campeonato. As respostas serão analisadas com o propósito de compreender a perspectiva dos participantes do SUB12, relativamente à resolução de problemas fora da sala de aula.

Desde já agradeço a colaboração.

O Encarregado de Educação: ________________________________

O participante: ____

O investigador: ____

Anexo 9 – Autorização para realização de entrevista aos Professores

Autorização para realização de entrevista

Exmo(a). Sr(a). Professor(a).

Chamo-me Nuno Alexandre Rodrigues Amaral, sou professor de Matemática e Ciências da Natureza e venho por este meio pedir a sua participação numa entrevista vídeo/áudio. Esta entrevista faz parte do trabalho de investigação que estou a desenvolver, relacionada com o campeonato de resolução de problemas SUB12, no âmbito do meu Doutoramento em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação, da Universidade de Lisboa. O diálogo será transcrito e garantido o anonimato do entrevistado, bem como toda a informação recolhida. A participação será um grande contributo para o referido estudo.

O objectivo da investigação é estudar a perspectiva dos professores sobre os seus alunos participantes no Campeonato de Resolução de Problemas SUB12.

Desde já agradeço a colaboração.

O Professor: ___________________________________

O investigador: ________________________________